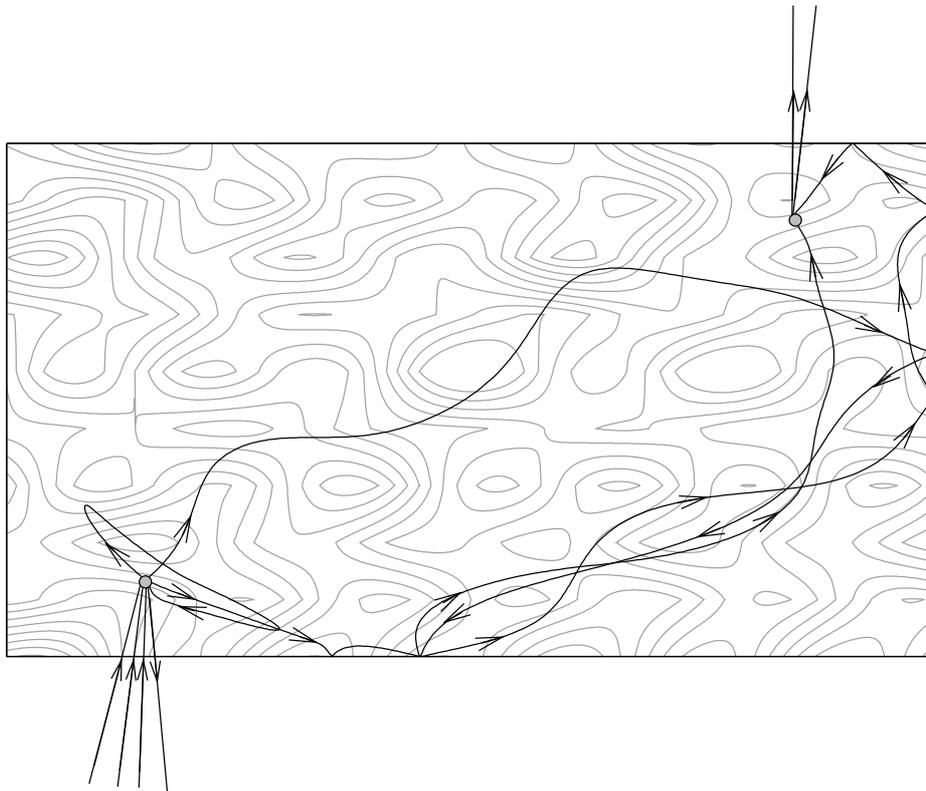


Roland Gersch

Randbedingungen für mesoskopische Systeme mit Dirac-Näherung

Juni 2004



Diese Arbeit wird zur Erlangung des Grades Diplom-Physiker eingereicht.

Sie wurde betreut am Institut für Theoretische Physik der Universität zu Köln
durch Herrn Professor Ph.D. Martin R. Zirnbauer.

Zusammenfassung

Wir untersuchen einige Randbedingungen für Diracoperatoren aus Sicht des Kontinuumslikes des Chalker-Coddington-Modells sowie aus Sicht der mathematischen Theorie von Spinorbündeln über kompakten Mannigfaltigkeiten mit zylindrischem Kragen. Wir definieren den Begriff Punktkontakt im Kontinuumslikes über eine Aufteilung der Wellenfunktion am Kontaktort, die von einer Randbedingung sichergestellt wird. Abschließend untersuchen wir für ein System mit schwacher Unordnung die Beziehung zwischen Punktkontaktleitwerten im offenen und Dichtekorrelationen im geschlossenen Fall.

Inhaltsverzeichnis

0.1	Was sind Diracoperatoren?	3
1	Randbedingungen für Diracoperatoren	9
1.1	Physikalische Sicht	9
1.1.1	Der Vergleich zum Schrödingerfall	9
1.1.2	Physikalische Randbedingung	10
1.1.3	Lokale Randbedingungen für den Diracoperator auf der rechten Halbebene	10
1.1.4	Lokale Randbedingungen für den Diracoperator auf der Einheitskreisscheibe	16
1.2	Mathematische Sicht	18
1.2.1	Konstruktion von Spinorbündel und Diracoperator	18
1.2.2	Mathematische Randbedingungen: Die selbstadjungier- te Fredholm-Grassmannsche	20
1.2.3	Beispiel 1: Die Halbebene, masseloses Teilchen	21
1.2.4	Beispiel 1a: Die Halbebene, massives Teilchen	23
1.2.5	Beispiel 2: Die Kreisscheibe, masseloses Teilchen	24
1.2.6	Beispiel 3: Die Hemisphäre	26
1.2.7	Der Calderón-Projektor P_M	30
1.2.8	Der Calderón-Projektor für ein masseloses Diracfermi- on auf der Halbebene	30

2	Punktkontakte, Leitwerte und Dichtekorrelationen	33
2.1	Punktkontakte für Diraceteilchen in zwei Dimensionen	33
2.1.1	Punktkontakt im Chalker-Coddington-Modell	33
2.1.2	Punktkontakt im klassischen Chalker-Coddington-Modell	34
2.1.3	Lösung der Diracgleichung auf einem punktierten Teilgebiet der Ebene	35
2.1.4	Aufteilung in ein- und auslaufende Wahrscheinlichkeit und Randbedingungen an der Punktierung	42
2.1.5	Simulation eines kurzgeschlossenen Punktkontakts durch ein Störpotential	45
2.2	Punktkontaktleitwerte und Dichtekorrelationen	46
2.2.1	Einleitung	47
2.2.2	Eine Formel für den Leitwert	49
A	Stückwerk zur Mathematik	61
A.1	Clifford-Algebra	61
A.2	Levi-Civita-Zusammenhang	62

0.1 Was sind Diracoperatoren?

In der relativistischen Quantenmechanik beschreibt die Diracgleichung die Dynamik der Fermionen. Sie wird verwendet, da die klassische Schrödingerdynamik weder die relativistische Energie-Impuls-Relation erfüllt noch den Spin der Fermionen beschreibt. Diese Arbeit beschäftigt sich mit Diracoperatoren in der Festkörperphysik. Hier ist die Dynamik nicht-relativistisch. Sie wird von den Differentialoperatoren zweiter Ordnung beschrieben, die in der Physik Schrödinger- und in der Mathematik Laplace-Operatoren heißen. Ein Diracoperator beschreibt hier zum Beispiel eine effektive Theorie bei tiefen Temperaturen.

Aus Sicht der Mathematik ist ein Diracoperator eine Quadratwurzel aus einem Laplace-Operator. Ein Laplace-Operator ist ein Operator der Form

$$\sum_{ij} g^{ij} \partial_i \partial_j + \text{Terme 1. und 0. Ordnung}$$

in lokalen Koordinaten. $g^{ij} = (dx^i, dx^j)$ bezeichnet die Metrik auf dem Kotangentenbündel.

Wir betrachten zunächst das kanonische Beispiel für einen Diracoperator in der relativistischen Quantenmechanik: Den Hamiltonian des freien Elektrons in der $(3+1)$ -dimensionalen Minkowski-Raumzeit. Aus der klassischen Energie-Impuls-Relation

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

für ein Teilchen mit Masse m folgt bekanntlich mit Hilfe des Korrespondenzprinzips die Schrödingergleichung in Ortsdarstellung. Die Energiedispersion für ein relativistisches Teilchen ist aber

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2, \tag{1}$$

wenn c die Lichtgeschwindigkeit ist. Anwendung des Korrespondenzprinzips führt zur Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (c\hbar)^2 \Delta \right) \chi = m^2 c^4 \chi,$$

die man in manifest relativistisch kovarianter Form auch

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \chi = 0$$

schreiben kann – aus mathematischer Sicht eine Eigenwertgleichung für einen Laplace-Operator. Diese Gleichung ist allerdings von zweiter Ordnung in der Zeit, was physikalisch gesehen die Wahrscheinlichkeitsinterpretation für χ erschwert. Man zieht daher die Quadratwurzel und schreibt dazu formell

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0.$$

ψ nimmt Werte in einem noch zu bestimmenden Vektorraum an. Alle Ableitungen sind erster Ordnung. Im Gegensatz zur Schrödingergleichung spielt die Ableitung nach der Zeit hier analog zur relativistischen Dispersionsrelation keine hervorgehobene Rolle. Zweimaliges Anwenden des Operators auf der linken Seite muß eine Klein-Gordon-Gleichung in jeder Komponente von ψ ergeben. Es folgt die fundamentale Antivertauschungsrelation der γ^μ , die Cliffordrelation

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2g^{\mu\nu}\mathbb{1},$$

mit der Lorentzmetrik der Raumzeit $g^{\mu\nu}$. Diese Relation bildet eine Grundlage für die Konstruktion allgemeinerer Diracoperatoren. Sie legt hier die Anzahl der Komponenten von ψ auf ein natürlichzahliges Vielfaches von Vier fest. Diese Tatsache erlaubt die Beschreibung des Elektronenspins, für die allerdings auch zwei Komponenten gereicht hätten. Die überzähligen Komponenten entsprechen außerdem negativen Energien. Um das Dilemma zu lösen, postulierte Dirac, daß in der Natur alle Zustände mit negativer Energie besetzt seien. Ist ein Zustand nicht besetzt, so entsteht ein Positron, das damals aber experimentell noch unbekannt war.

Angesichts der Tatsache, daß die Diracgleichung die relativistische Energie-Impuls-Relation erfüllt, ist es umso erstaunlicher, daß Diracoperatoren auch als Hamiltonians, also Generatoren der Zeitentwicklung, in der Festkörperphysik Anwendung finden. Ein Beispiel – mit dem wir uns in dieser Arbeit vornehmlich beschäftigen – ist der Kontinuumsimes des Chalker-Coddington-Modells, siehe [5]. Den Kontinuumsimes eines quadratischen Gittermodells, in dem Teilchen von einem Gitterplatz zum nächsten und übernächsten springen können, beschreiben Ludwig, Grinstein, Shankar und Fisher in [7]. Eine Zusammenfassung der Beschreibung des Tieftemperaturimes von D-Wellen-Supraleitern mit Hilfe von Diracoperatoren liefern Zirnbauer, Altland und Simons in [3].

Um zu verstehen, wie ein Diracoperator in effektiven Beschreibungen festkörperphysikalischer Modelle auftaucht, betrachten wir einen auf mehrkomponentigen Wellenfunktionen wirkenden Propagator

$$U = e^{-it\hbar^{-1}H(k)}$$

mit Hamiltonian H im Impulsraum. Die Exponentialfunktion lässt sich in eine Potenzreihe

$$U = 1 - it\hbar^{-1} \left[H|_{k=0} + (\partial_k H)|_{k=0}k + \frac{1}{2}(\partial_k^2 H)|_{k=0}k^2 + \dots \right] + \dots$$

entwickeln. Für kleine Impuls- und damit Energievariationen sowie nichtverschwindendem $(\partial_k H)|_{k=0}$ und verschwindendem $H|_{k=0}$ vernachlässigen wir höhere Ordnungen und erhalten als Näherung für den Hamiltonian im Ortsraum

$$D := (\partial_k H)|_{k=0}\partial_x,$$

was ein Diracoperator sein kann, wenn U auf mehrkomponentigen Wellenfunktionen wirkt.

Die Spektren von U und D veranschaulichen die durchgeführte Näherung: Das Spektrum von D liegt auf der Tangente in 1 an den Einheitskreis, auf dem das Spektrum von U liegt, siehe Abbildung 1. Im Gegensatz zur relativistischen Quantenmechanik, in der Diracoperatoren zur Beschreibung des Hochenergieverhaltens verwendet werden, beschreibt dieser Diracoperator also das Niederenergieverhalten des Systems! Zudem kann der Massenterm von D verschwinden: Die beschriebene Dynamik ist dann die masseloser Teilchen oder Anregungen.

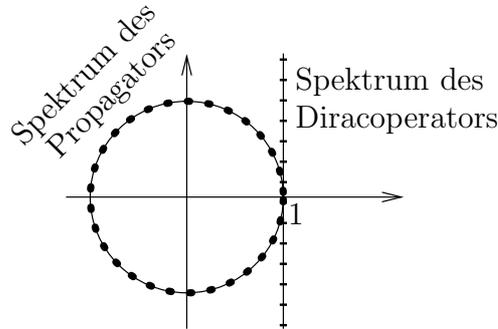


Abbildung 1: Spektren eines Propagators und des zugehörigen Diracoperators.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Randbedingungen für Diracoperatoren. Randbedingungen sind nötig, um aus dem Vektorraum aller Lösungen χ einer linearen Differentialgleichung $L\chi = 0$ die zum jeweils gestellten Problem passenden auszuwählen. Eine äquivalente Sichtweise ist: Eine Randbedingung schränkt den Definitionsbereich des Operators L ein. Er behält dabei seine formale Gestalt bei, die Änderung des Definitionsbereich ändert aber seine Eigenschaften.

Wir betrachten zunächst einen Schrödingeroperator auf Funktionen auf einem Intervall. Bekanntlich erfüllt die Dirichlet-Randbedingung

$$\chi|_{\text{Rand}} = 0$$

die physikalische Forderung, daß der Strom durch den Rand verschwindet. Der Schrödingeroperator ist auf dem so eingeschränkten Funktionenraum selbstadjungiert. Schränken wir hingegen den Definitionsbereich eines Diracoperators mit dieser Randbedingung ein, so bleibt uns nur die triviale Lösung. Der Diracoperator ist auf dem eingeschränkten Funktionenraum nicht selbstadjungiert. Sinnvolle Randbedingungen für einige relativistische Diracoperatoren werden in [2] diskutiert. Wir werden uns mit Randbedingungen sowohl auf dem Rand als auch an Löchern in einer Mannigfaltigkeit für Diracoperatoren aus der Festkörperphysik beschäftigen.

Die folgende Arbeit besteht aus zwei Teilen. Der erste beschäftigt sich mit Randbedingungen für Diracoperatoren aus physikalischer und mathematischer Sicht. Wir werden zuerst eine physikalisch motivierte Randbedingung formulieren: Wir fordern das Verschwinden der Wahrscheinlichkeitsstromdichte durch den Rand der betrachteten Mannigfaltigkeit. Wir führen dann das Gittermodell von Chalker und Coddington ein, das im Kontinuums- und Tieftemperaturlimit durch einen Diracoperator D beschrieben wird. Außerdem wird mit diesem Modell eine natürliche Randbedingung für Spinoren auf der Halbebene mitgeliefert. Wir rechnen explizit die Hermitezität von D nach und zeigen, daß für der Randbedingung genügende Eigenspinoren die Normalkomponente der Wahrscheinlichkeitsstromdichte am Rand verschwindet. Für die Einheitskreisscheibe finden wir Randbedingungen durch explizites Ausrechnen der Adjungierten von D , ebenso für ein beschränktes, sternförmiges Teilgebiet der Ebene.

Wir wenden uns dann der mathematischen Sichtweise zu. Im physikalischen Teil haben wir uns nur mit Mannigfaltigkeiten verschwindender Krümmung befaßt. Langfristig sollen auch Randbedingungen für den Fall nichtverschwindender Krümmung verstanden werden. Wir geben deshalb zunächst für eine bestimmte Klasse von Mannigfaltigkeiten eine Konstruktionsvorschrift für Diracoperatoren. Wir möchten eine der in der Mathematik existierenden Theorien nutzen und beschäftigen uns daher mit der Arbeit [9] von Paul Kirk und Matthias Lesch. Um kompatibel zu sein, schränken wir uns weiter ein und betrachten eine Untermenge von Diracoperatoren auf Spinorbündeln über glatten, kompakten Mannigfaltigkeiten mit Kragen. Ein Beispiel für eine solche Mannigfaltigkeit ist der Erlenmeyerkolben aus der Chemie. Wählt man als Randbedingung ein Element der sogenannten selbstadjungierten

Fredholm-Grassmannschen, einer Familie orthogonaler Projektoren, so hat der Diracoperator physikalisch sinnvolle Eigenschaften. Obwohl die von uns zuvor betrachteten Mannigfaltigkeiten und Diracoperatoren die von der Mathematik gestellten Bedingungen verletzen, stellen wir fest, daß zumindest einige zu den gefundenen Randbedingungen gehörige Projektoren Elemente der jeweiligen Fredholm-Grassmannschen sind. Zuletzt konstruieren wir noch einen Diracoperator auf einem Spinorbündel über der oberen Einheitshalbkugelschale, einer Mannigfaltigkeit, die nach Verklebung mit einem niedrigen Kreiszyklindermantel allen mathematischen Voraussetzungen genügt. Die Mathematik kennt verschiedene Indizes und Invarianten von Diracoperatoren. Angelpunkt der Theorie ist der Calderón-Projektor, den wir definieren und für die Halbebene als Basismannigfaltigkeit auszurechnen versuchen.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Punktkontakten und ihren Leitwerten für den Diracoperator D mit schwacher Unordnung auf einem Spinorbündel über einem Teilgebiet der Ebene. Für das Chalker-Coddington-Netzwerkmodell ist ein Punktkontakt durch Aufschneiden eines Verbindungsstücks und Verwendung der Enden als Zu- und Abflüsse des Systems erklärt. Wir simulieren numerisch zwei Punktkontakte in einem verwandten klassischen Modell. Die Wahrscheinlichkeitsdichten verhalten sich in der Nähe der Kontaktorte divergent. Wir definieren den Begriff Punktkontakt im Kontinuumslimes als eine Bedingung an das Verhältnis der Koeffizienten von ein- und auslaufender Komponente eines Eigenspinors. Wir stellen fest, daß diese Bedingung zum Beispiel bei Angabe bestimmter Randbedingungen für die Spinoren erfüllt ist. Unser Ziel ist nun, die Aufteilung der Eigenspinoren in ein- und auslaufende Komponente formal durchzuführen. Um einen Punkt auszuzeichnen, schreiben wir die Diracgleichung in Polarkoordinaten auf. Wir lösen sie durch Entwicklung nach Drehimpulseigen-spinoren. Die gesuchte Aufteilung der Spinoren ergibt sich bei diesem Zugang automatisch. Auch hier zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichte divergentes Verhalten in der Nähe des Punktkontaktorts. Zuletzt finden wir eine Möglichkeit, einen kurzgeschlossenen Punktkontakt im geschlossenen System durch lokale Variation des Potentials zu simulieren.

In [6] finden Rochus Klesse und Martin R. Zirnbauer eine Formel, die für das Chalker-Coddington-Modell mit $U(1)$ -Unordnung Punktkontaktleitwerte mit Dichtekorrelationen in Verbindung setzen. Sie nutzen aus, daß die Eigenzustände eines geschlossenen Netzwerks bei Resonanz den Streuzuständen des offenen Netzwerks entsprechen. Zur Einstellung auf Resonanz wird eine Phase variiert. Da das Spektrum des Propagators periodisch sowohl entlang der Spektralachse als auch unter Variation der Phase ist, kann gezeigt werden,

daß für genau einen Wert des Phasenwinkels Resonanz eintritt. Wesentlich ist nun die Tatsache, daß das Unordnungsmittel auch über diese Phase mittelt. Es gibt also einen einfachen Zusammenhang zwischen der Mittelung über resonante Konfigurationen und der ursprünglichen Unordnungsmittelung. Eine Anwendung dieses Zusammenhangs auf eine Relation, die bei Resonanz den Punktkontaktleitwert nach Landauer und Büttiker mit Dichtekorrelationen verbindet, liefert die Ergebnisformel. Wir versuchen, den entsprechenden Zusammenhang im Kontinuumslimit mit schwacher Unordnung zu finden. An die Stelle der Phasenabstimmung von Klesse und Zirnbauer tritt eine Abstimmung des Unordnungspotentials in der Nähe eines Kontakts. Man stößt dabei auf Probleme, da das Spektrum weder unter Variation des Potentials noch entlang der Spektralachse periodisch ist. Wir versuchen, das Problem durch Mittelung über viele resonante Einstellungen zu lösen. Wir nehmen im folgenden an, daß das Unordnungsmittel ausreichend starke Potentialvariationen enthält. Unter weiteren Annahmen, deren Gültigkeit wir im Detail besprechen, erhalten wir eine ähnliche Beziehung zwischen resonantem und gewöhnlichem Unordnungsmittel wie Klesse und Zirnbauer. Diese Beziehung liefert eine analoge Ergebnisformel.

Kapitel 1

Randbedingungen für Diracoperatoren

1.1 Physikalische Sicht

1.1.1 Der Vergleich zum Schrödingerfall

In der Festkörperphysik wird die Dynamik meistens beschrieben durch einen Operator vom Schrödingertyp. In Ortsdarstellung handelt es sich um Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Als Konsequenz daraus weisen Wellenfunktionen f unter schwachen Voraussetzungen an die den Schrödingeroperator charakterisierenden Potentiale keine Sprungstellen auf. Ist das System begrenzt, so ergibt sich aus der Sprungstellenfreiheit eine natürliche Randbedingung für die Wellenfunktion:

$$f|_{\text{Rand}} = 0.$$

Diese Randbedingung stellt sicher, daß keine Wahrscheinlichkeit aus dem System heraus fließt; das ist äquivalent dazu, daß der Schrödingeroperator auf den die Randbedingung erfüllenden Wellenfunktionen hermitesch ist.

Diracoperatoren wirken nun auf Spinoren ψ und sind in Ortsdarstellung Differentialoperatoren erster Ordnung. Deshalb dürfen – stellt man die obige Bedingung an die Potentiale hier an die Masse – die Spinoren am Rand springen. Das ist auch nötig: Verlangen wir

$$\psi|_{\text{Rand}} = 0,$$

so verschwindet ψ als Eigenspinor des Diracoperators überall.

1.1.2 Physikalische Randbedingung

Eine physikalisch geeignete Randbedingung ergibt die Forderung, daß die Wahrscheinlichkeitsstromdichte senkrecht zum Rand verschwinden soll. Diese Randbedingung unterscheidet sich qualitativ von der Randbedingung im Schrödingerfall und auch von den in der mathematischen Theorie betrachteten. Sie ist, wie wir sehen werden, nicht linear, sondern quadratisch in den Spinorkomponenten. Wir werden später aber mehrere Spezialfälle übersetzen.

Definieren wir zunächst den Begriff Wahrscheinlichkeitsstrom. Die Norm $\psi^\dagger\psi$ eines Spinors ist identisch zur Aufenthaltswahrscheinlichkeitsfunktion $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Ortsraum M . ρ ist eine ungerade Topform zugeordnet, die wir Wahrscheinlichkeitsdichte nennen und ebenfalls mit ρ bezeichnen. Es gilt die (zeitabhängige) Diracgleichung. Weiterhin fordern wir Wahrscheinlichkeitserhaltung, also die Gültigkeit einer Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + dj = 0$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte. j ist die gesuchte Wahrscheinlichkeitsstromdichte, eine ungerade 2-Form. Wir werden j für $M \subset E_2$ und einen speziellen Diracoperator später explizit ausrechnen.

1.1.3 Lokale Randbedingungen für den Diracoperator auf der rechten Halbebene

Als erstes Beispiel betrachten wir die rechte Halbebene. Wir möchten einen festkörperphysikalisch relevanten Diracoperator verwenden und betrachten deshalb das Chalker-Coddington-Modell.

Das Chalker-Coddington-Modell.

Das Chalker-Coddington-Modell beschreibt Teilchen auf einem quadratischen, bipartiten und chiralen Netzwerk. Die Teilchen sitzen zu diskreten, äquidistanten Zeitpunkten auf den Verbindungsstücken (im folgenden abkürzend auch "Links" genannt) des Netzwerks. Die Wahrscheinlichkeitsamplituden auf den Links werden im Zustandsvektor Ψ zusammengefaßt. Ihre Dynamik kann durch einen Propagator U beschrieben werden, der Ψ zu einem Zeitpunkt T auf Ψ zum Zeitpunkt $T + 1$ abbildet:

$$\Psi(T + 1) = U\Psi(T).$$

Dieser Propagator hat mehrere spezielle Eigenschaften:

1. U kennt die Bipartitat des Gitters: Wahrscheinlichkeitsdichte auf einem horizontalen Link wird abgebildet auf Wahrscheinlichkeitsdichte auf vertikalen Links.
2. Die Wahrscheinlichkeit verlast einen Link nur in eine Richtung (Chiralität).
3. Aus 1. und 2. folgt: Beim Verlassen eines Links biegt ein Teilchen nach rechts oder links ab. Der Bruchteil p der Wahrscheinlichkeitsamplitude, der nach rechts abbiegt, sei nun räumlich zufällig aber zeitlich konstant verteilt.
4. Beim Übergang von einem Link zum nächsten erhält die Wahrscheinlichkeitsamplitude eine zufällige, aber zeitlich konstante Phase.
5. Wir wählen willkürlich eine der vier Verbindungsorientierungen. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude, die auf einen Link mit dieser Orientierung transportiert wird, erhält eine zusätzliche Phase mit Phasenwinkel π .

Wir möchten den Propagator als möglichst kompakte Matrix schreiben. Dazu teilen wir das Netzwerk in quadratische Plaketten auf, deren Ränder den Uhrzeigersinn als Umlaufsinn tragen. Wir bezeichnen eine Plakette des Netzwerks wie in Abbildung 1.1. Wir ordnen die Amplituden auf den Verbindungen einer Plakette zu einem 4-Tupel

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_3 \\ \tilde{\psi}_2 \\ \tilde{\psi}_4 \end{pmatrix}$$

und bezeichnen $\tilde{\psi}$ im folgenden als Spinor. Die Länge der Verbindungsstücke sei 1. Wir können U jetzt als Summe von Tensorprodukten von 4×4 -Matrizen mit Translationen um 1 und 0 entlang der Gitterachsen schreiben.

Vom Chalker-Coddington-Modell zum Diracoperator

Der Propagator U hat dann die Blockform

$$U = \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U^2 = \begin{pmatrix} MN & 0 \\ 0 & NM \end{pmatrix}.$$

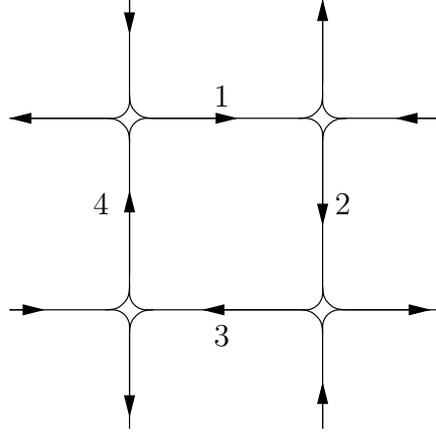


Abbildung 1.1: Bezeichnungen für eine Plakette des Chalker-Coddington-Modells.

U^2 ist also blockdiagonal. Die Zeitentwicklung der Untergitter ist durch die Quadrierung entkoppelt worden. Nach Fouriertransformation und Übergang zum Kontinuumslimit ergibt sich unter Verwendung der Näherung

$$U = e^{-i\tilde{D}} \approx 1 - i\tilde{D}$$

ein Operator

$$\tilde{D} = \sigma_z(-i\partial_x - A_x) + \sigma_x(i\partial_y + A_y) - \sigma_y m + \mathbb{1}V$$

vom Diractyp für $M \cdot N$. σ_i sind die Paulimatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$A = A_x dx + A_y dy$ ist ein magnetisches Eichpotential, V ein Skalarpotential und m eine ortsabhängige Masse. Die Masse entsteht aus den zufälligen Abweichungen der Abbiegeamplitude von $1/2$, Eich- und Skalarpotential aus den Zufallsphasenwinkeln. Ein ähnlicher Operator \tilde{D}' ergibt sich für $N \cdot M$:

$$\tilde{D}' = \sigma_z(i\partial_y + A_y) + \sigma_x(-i\partial_x - A_x) + \sigma_y m + \mathbb{1}V.$$

Chalker und Ho berechnen nun noch eine Ähnlichkeitstransformation

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, G^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & -i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

die \tilde{D} in Standardform bringt. Hiermit gilt:

$$D := G\tilde{D}G^{-1} = \sigma_x(p_x - A_x) + \sigma_y(p_y - A_y) + \sigma_z m + \mathbb{1}V. \quad (1.2)$$

Zu \tilde{D}' findet man die Ähnlichkeitstransformation

$$G' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, G'^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

so daß $D' := G'\tilde{D}'G'^{-1}$ Standardform hat.

Eine Randbedingung.

Das Netzwerkmodell liefert für einen Rand entlang der Linkachsen eine Randbedingung, die die Wahrscheinlichkeitsstromdichte am Rand des Gitters verschwinden läßt. Wir betrachten die rechte Halbebene, die wir mit einem Chalker-Coddington-Netzwerk füllen. Um ein Teilchen vollständig von ihrem linken Rand abprallen zu lassen, muß die über Verbindung 1 zurückfließende Wahrscheinlichkeit gleich der über Verbindung 3 einfließenden Wahrscheinlichkeit sein, was man durch

$$\tilde{\psi}_1 = -\tilde{\psi}_3$$

sicherstellen kann. Die zusätzliche π -Phase aus Punkt 5. von Seite 11 wird hier an Link 4 hinzugefügt, was das Vorzeichen erklärt. Für obere Ränder lautet die Bedingung zum Beispiel $\tilde{\psi}_2 = \tilde{\psi}_4$.

Erstere Randbedingung läßt sich auch schreiben als

$$\tilde{P}\tilde{\psi} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In dieser Form ist sie vergleichbar mit den Randbedingungen aus der mathematischen Arbeit [9] von Paul Kirk und Matthias Lesch. Sie läßt sich für D umformen:

$$P := G\tilde{P}G^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Für ein System, dessen Dynamik von D bestimmt wird, vermuten wir also, daß die Bedingung $\psi_3|_{\text{Rand}} = i\psi_1|_{\text{Rand}}$ zu einem reellen Spektrum führt und keinen Fluß durch die y -Achse zuläßt. Die $\psi_{\{1,2,3,4\}}$ sind im Kontinuumslimit Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Hermitizität von D mit der Randbedingung P

Wir betrachten im folgenden das Vektorbündel

$$\pi : (E := \text{rechte Halbebene} \times \mathbb{C}^2) \rightarrow (M := \text{rechte Halbebene}).$$

Wir zeigen, daß D mit der Randbedingung P ein hermitescher Operator ist. “ D mit der Randbedingung P ” ist zu verstehen als $D|_{\{\psi \in L^2(E) | P\psi|_{\text{Rand}}=0\}}$ und wird (D, P) abgekürzt. Seien ψ und χ zwei beliebige, quadratintegrale 2-Spinoren. Es gilt

$$\begin{aligned} & \langle \psi | D\chi \rangle \\ &= \int_M \left[\begin{pmatrix} V + m & -A_x + iA_y \\ -A_x - iA_y & V - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \right]^\dagger \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_3 \end{pmatrix} dx \wedge dy + \\ & \quad + \int_M [\bar{\psi}_1(-i\partial_x - \partial_y)\chi_3 + \bar{\psi}_3(-i\partial_x + \partial_y)\chi_1] dx \wedge dy \\ &= \langle D\psi | \chi \rangle - i \int_{\partial M} (\bar{\psi}_1\chi_3 + \bar{\psi}_3\chi_1)|_{x=0} dy. \end{aligned}$$

Wie wir sehen, ist D genau dann hermitesch für wie oben definierte Spinoren, wenn $\int_{\mathbb{R}} (\bar{\psi}_1\chi_3 + \bar{\psi}_3\chi_1)|_{x=0} dy = 0$ ist. Betrachten wir die Randbedingungen aus Abschnitt 1.1.3: $\chi_3|_{x=0} = i\chi_1|_{x=0}$, $\psi_3|_{x=0} = i\psi_1|_{x=0}$, so gilt

$$\bar{\psi}_1\chi_3 + \bar{\psi}_3\chi_1 = i\bar{\psi}_1\chi_1 - i\bar{\psi}_1\chi_1 = 0,$$

$|_{x=0}$ der Übersichtlichkeit halber weglassend. (D, P) ist also hermitesch.

Wahrscheinlichkeitsfluß durch die y -Achse

Wir suchen in diesem Abschnitt zunächst zum gegenüber (1.2) etwas vereinfachten Diracoperator $D = -i\sigma_x\partial_x - i\sigma_y\partial_y$ und Randbedingungsoperator P aus (1.3) passende stationäre Zustände. Wir zeigen dann, daß in diesen Zuständen die Wahrscheinlichkeitsstromdichte durch die y -Achse verschwindet.

Wir fouriertransformieren D mit Hilfe der uneigentlichen Orthogonalbasis $\{e^{ikx}e^{iqy} | k, q \in \mathbb{R}\}$ von $L^2(\mathbb{R}^2)$ und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & k - iq \\ k + iq & 0 \end{pmatrix}.$$

Deren Eigenwerte sind wie erwartet $E_{\pm} = \pm\sqrt{k^2 + q^2}$. Zum positiven Eigenwert erhalten wir den Eigenvektor

$$\psi_+(k, q) := \begin{pmatrix} k - iq \\ E_- \end{pmatrix} = E_+ \begin{pmatrix} e^{-i \arg(k+iq)} \\ -1 \end{pmatrix},$$

zum negativen

$$\psi_-(k, q) := \begin{pmatrix} k - iq \\ E_+ \end{pmatrix} = E_+ \begin{pmatrix} e^{-i \arg(k+iq)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der allgemeinste Ansatz für einen Eigenzustand von D mit $E \neq 0$ ist

$$\psi(x, y) := \int dq dk \frac{1}{E_+} (\alpha_+(k, q)\psi_+(k, q)e^{ikx} + \alpha_-(k, q)\psi_-(-k, q)e^{-ikx}) e^{iqy}.$$

Die ungewöhnliche Anordnung dient der Vereinfachung der folgenden Rechnung. Die Parameter α_{\pm} sind \mathbb{C} -wertige Funktionen, die nun an die Randbedingung (1.3) angepaßt werden. Wir unterdrücken in der folgenden Rechnung ihre Argumente. Wir schreiben $\beta := e^{-i \arg(k+iq)}$. Es muß gelten:

$$\begin{aligned} \psi_2|_{x=0} &= i\psi_1|_{x=0} \\ \Leftrightarrow \alpha_- - \alpha_+ &= i\alpha_+\beta - i\alpha_-\bar{\beta} \\ \Leftrightarrow \alpha_-(1 + i\bar{\beta}) &= \alpha_+(1 + i\beta). \end{aligned}$$

$$\psi_{k,q} := \left((1 + i\bar{\beta}) \begin{pmatrix} \beta \\ -1 \end{pmatrix} e^{ikx} + (1 + i\beta) \begin{pmatrix} -\bar{\beta} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ikx} \right) e^{iqy}$$

erfüllt also $P\psi = 0$ und $D\psi = E_+\psi$. Wegen der Linearität aller vorkommenden Operatoren, der Sesquilinearität des Skalarprodukts und der Orthogonalität der $\{e^{i(kx+qy)}\}$ brauchen wir nur zu zeigen, daß für diesen Spinor der Wahrscheinlichkeitsstrom j_x durch die y -Achse verschwindet. j_x wurde auf Seite 10 definiert und wird auf Seite 37 berechnet. Es ist

$$\begin{aligned} j_x(0, \bullet) &\propto \Re \psi_{k,q}^\dagger \sigma_x \psi_{k,q}|_{x=0} \\ &= \Re \left[\underbrace{(\beta + \bar{\beta})}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(1 + i\bar{\beta})(1 + i\beta)}_{\in i\mathbb{R}} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß die aus dem diskreten Chalker-Coddington-Modell gefolgerte Randbedingung auch im Dirac- und Kontinuumslimit das Teilchen in der rechten Halbebene festsetzt.

1.1.4 Lokale Randbedingungen für den Diracoperator auf der Einheitskreisscheibe

Wir betrachten in diesem Abschnitt als Basismannigfaltigkeit M unseres Spinorbündels $\pi : E \rightarrow M$ nicht mehr die Halbebene wie in Abschnitt 1.1.3, sondern die Einheitskreisscheibe zentriert auf dem Ursprung $B_1(o)$. Als Diracoperator wählen wir der Einfachheit halber $D = -i\sigma_x\partial_x - i\sigma_y\partial_y$. Wir wollen zunächst herausfinden, welche Randbedingungen Spinoren aus $L^2(E)$ erfüllen müssen, damit D auf ihnen hermitesch ist. Wir verwenden im folgenden der Kürze halber die Konvention $\partial_i f =: f_i$ mit i einer Koordinatenfunktion. Wir werden zu Polarkoordinaten übergehen. Die Konventionen sind hier:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, & y &= r \sin \phi, \\ \partial_x &= \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi, & \partial_y &= \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi + \sin \phi \partial_r, \\ dx \wedge dy &= r dr \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \langle \chi | D\psi \rangle &= \int_{B_1(o)} (-i\bar{\chi}_1\psi_{3x} - \bar{\chi}_1\psi_{3y} - i\bar{\chi}_3\psi_{1x} + \bar{\chi}_3\psi_{1y}) dx \wedge dy \\ &= \int_{B_1(o)} [-\bar{\chi}_1(-i \sin \phi + \cos \phi)\psi_{3\phi} - r\bar{\chi}_1(i \cos \phi + \sin \phi)\psi_{3r} + \\ &\quad + \bar{\chi}_3(i \sin \phi + \cos \phi)\psi_{1\phi} + r\bar{\chi}_3(\sin \phi - i \cos \phi)\psi_{1r}] dr \wedge d\phi \end{aligned}$$

Wir integrieren die Terme, die Ableitungen nach r enthalten, partiell und erhalten:

$$\begin{aligned} \text{Terme zu } \langle D\chi | \psi \rangle &+ \int_0^{2\pi} \left[(\sin \phi - i \cos \phi) \left(\bar{\chi}_3\psi_1|_{r=1} - \int_0^1 \bar{\chi}_3\psi_1 dr \right) - \right. \\ &\left. - (\sin \phi + i \cos \phi) \left(\bar{\chi}_1\psi_3|_{r=1} - \int_0^1 \bar{\chi}_1\psi_3 dr \right) \right] d\phi. \end{aligned}$$

Die restlichen Terme integrieren wir partiell bezüglich ϕ und erhalten:

$$\text{Terme zu } \langle D\chi | \psi \rangle + \int_{B_1(o)} [(i \cos \phi + \sin \phi)\bar{\chi}_1\psi_3 + (i \cos \phi - \sin \phi)\bar{\chi}_3\psi_1] dr \wedge d\phi.$$

Die Hermitezität wird also nur noch durch

$$\int_0^{2\pi} [\sin \phi(\bar{\chi}_3\psi_1 - \bar{\chi}_1\psi_3) - i \cos \phi(\bar{\chi}_1\psi_3 + \bar{\chi}_3\psi_1)]_{r=1} d\phi \quad (1.4)$$

gestört. (1.4) wird zum Beispiel Null, wenn einer der Halbspinoren am Rand gleich Null ist. Der Integrand läßt sich außerdem in

$$-ie^{i\phi}\bar{\chi}_3\psi_1 - ie^{-i\phi}\bar{\chi}_1\psi_3$$

umschreiben. D ist also auch für Spinoren mit einem Verhältnis von erster zu zweiter Komponente von

$$\alpha(\phi)ie^{-i\phi}, \alpha(\phi) \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

hermitesch. Außerdem verschwindet (1.4) natürlich für Spinoren, die auf S^1 konstant sind. Diese Spinoren sind allerdings nie Eigenspinoren von D . Diese Randbedingung ist also zu stark, um physikalisch sinnvoll zu sein.

Sei M eine kompakte, sternförmige Teilmenge des \mathbb{R}^2 mit glattem Rand. Sei o Sternpunkt von M . Wir zeichnen eine gerichtete Achse durch o aus und bestimmen alle anderen gerichteten Achsen durch o mit Hilfe des Winkels ϕ , den sie mit der ausgezeichneten Achse einschließen. Jedes $m \in M$ liegt auf dem bezüglich o positivem Teil genau einer Achse, ϕ ist also eine gute Koordinatenfunktion. Als zweite Koordinatenfunktion wählen wir

$$\frac{d(o, \bullet)}{k(\phi)}.$$

$k(\phi)$ ist der Abstand zwischen o und dem unter dem Winkel ϕ sichtbaren Randpunkt. Eine analoge Rechnung ergibt: D ist für Spinoren ψ , χ genau dann hermitesch, wenn

$$\begin{aligned} & \int_{\partial M} k'(\phi) (\bar{\psi}_3\chi_1e^{i\phi} - \bar{\psi}_1\chi_3e^{-i\phi}) d\phi + \\ & + i \int_{\partial M} k(\phi) (\bar{\psi}_3\chi_1e^{i\phi} + \bar{\psi}_1\chi_3e^{-i\phi}) d\phi = 0 \end{aligned}$$

ist. Die Verallgemeinerung der Randbedingungen $\psi_3 = i\psi_1$ auf der y -Achse als Rand der rechten Halbebene und $\psi_3 = -ie^{i\phi}\psi_1$ auf dem Kreis als Rand der Scheibe ist also¹

$$\psi_1|_{\partial M} = \alpha(\phi)e^{-i\phi} \{k'(\phi) - ik(\phi)\} \cdot \psi_3|_{\partial M}$$

mit einer beliebigen glatten und reellen Funktion α . Eine weitere sinnvolle Randbedingung ist auch in diesem Fall das Verschwinden eines Halbspinors auf dem Rand.

¹Für die nicht-kompakte Halbebene ist noch ein Grenzprozess durchzuführen.

1.2 Mathematische Sicht

Wir geben zunächst eine Konstruktionsvorschrift für einige Diracoperatoren auf Spinorbündeln. Wir beschränken uns dann auf eine bestimmte Klasse von Mannigfaltigkeiten und eine bestimmte Klasse von Diracoperatoren auf deren Spinorbündeln. Wir definieren Randbedingungen wie in der Mathematik üblich. Für die zuvor betrachteten Spezialfälle Kreis und Halbebene überprüfen wir, ob die gefundenen Randbedingungen zur mathematischen Definition passen.

1.2.1 Konstruktion von Spinorbündel und Diracoperator

Für die Physik interessant sind hauptsächlich Diracoperatoren auf speziellen Vektorbündeln, den Spinorbündeln. Wir geben im folgenden zu einer gegebenen orientierbaren gerade-dimensionalen Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit M eine Konstruktionsvorschrift für einen speziellen kanonischen Diracoperator, den Spin-Dirac-Operator, an. Wir orientieren uns an [4] und geben zunächst eine Zusammenfassung der Vorgehensweise. Zunächst definieren wir das Spinorbündel als äußere Algebra einer Polarisierung des komplexifizierten Kotangententialbündels. Das Cliffordbündel definieren wir als das Bündel, dessen Faser über einem Punkt $x \in M$ die Cliffordalgebra (siehe Anhang A.1) des Kotangententialraums an M in x ist. Es wirkt auf dem Spinorbündel durch Produktbildung. Wir berechnen den Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Spinorbündel, der ein Cliffordzusammenhang ist. Der Diracoperator ist dann eine Kombination aus diesem Cliffordzusammenhang und der Wirkung der Cliffordalgebra auf dem Spinorbündel.

Wir wollen ein Spinorbündel von M finden. Wir arbeiten in einer Koordinatenumgebung $U \subset M$. Sei $\{v^1, \dots, v^n\}$ ein Orthonormalrahmen von T^*U . Wir polarisieren $T^*U \otimes \mathbb{C}$ durch Bildung von

$$P := \langle e^1 := v^1 - iv^2, e^2 := v^3 - iv^4, \dots, e^{n/2} := v^{n-1} - iv^n \rangle.$$

Die eckigen Klammern stehen hier für die lineare Hülle ihres Arguments. Wir sehen, daß die per komplexer Bilinearität auf eine Bilinearform $T^*U \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ erweiterte Metrik (\bullet, \bullet) von T^*U Vektoren $v \in P$ die "Länge" Null zuweist:

$$(v, v) = 0.$$

Außerdem ist

$$T^*U \otimes \mathbb{C} = P \oplus \langle \overline{e^1}, \dots, \overline{e^{n/2}} \rangle,$$

es handelt sich bei P also um eine orientierte Polarisierung von $T^*U \otimes \mathbb{C}$. Die äußere Algebra ΛP von P bezeichnen wir nun als Spinorbündel \mathcal{S} .

Als nächstes definieren wir das Cliffordbündel CM von M . Dazu bilden wir zu jedem Punkt $x \in M$ die Cliffordalgebra $C(T_x^*M)$ des Kotangententialraums T_x^*M nach Anhang A.1. Das Bündel mit Basismannigfaltigkeit M , dessen Faser am Punkt x durch $C(T_x^*M)$ gegeben ist, heißt Cliffordbündel. In einer Koordinatenumgebung U wird CM gerahmt von

$$\{1\} \cup \{v^1, \dots, v^n\} \cup \{v^1 \cdot v^2, v^1 \cdot v^3, \dots, v^{n-1} \cdot v^n\} \cup \dots \cup \{v^1 \cdot \dots \cdot v^n\}.$$

Der nächste Schritt auf unserem Weg zum Diracoperator ist die Definition einer Wirkung $c : CM \rightarrow \text{End}(\mathcal{S})$ des Cliffordbündels auf dem Spinorbündel. Diese Wirkung wird auch Cliffordmultiplikation genannt. In unserem Fall ist dieser Begriff sehr intuitiv, wie sofort klar werden wird. Wir beschäftigen uns zunächst mit der Wirkung c von

$$\langle 1, e^1, \dots, e^{n/2}, \overline{e^1}, \dots, \overline{e^{n/2}} \rangle$$

auf \mathcal{S} . Für

$$v = v_0 1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{n/2} v_j e^j}_{=: v_P} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n/2} v_{j+n/2} \overline{e^j}}_{=: v_{\overline{P}}}$$

und $s \in \mathcal{S}$ definieren wir

$$c(v)s := v_0 s + \sqrt{2} v_P \wedge s - \sqrt{2} \iota(v_{\overline{P}})s.$$

$\iota(v_{\overline{P}})s$ ist über die Metrik definiert: In den ersten Eingabeschlitz der Differentialform s wird das Vektorfeld $(v_{\overline{P}}, \bullet)$ eingesetzt. Wir erweitern c auf den Rest des Cliffordbündels durch die Vorschrift $c(v \cdot w) = c(v)c(w)$. Damit ist die Cliffordmultiplikation vollständig definiert.

Als letzten Schritt auf dem Weg zum Diracoperator benötigen wir den Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Spinorbündel. Die Begriffe ‘‘Zusammenhang’’ und ‘‘Levi-Civita-Zusammenhang’’ werden in Anhang A.2 definiert. Wir finden die Zusammenhangskoeffizienten w_{ij}^k des Levi-Civita-Zusammenhangs nach (A.2) durch Koeffizientenvergleich und berechnen mit (A.3) die gesuchten Operatoren $\nabla_{\partial_i}^{\mathcal{S}}$.

Nun ist

$$D = \sum_j c(v^j) \nabla_{v_j}^{\mathcal{S}}$$

ein Diracoperator. In Abschnitt 1.2.6 werden wir die vorgestellte Konstruktion für ein konkretes Beispiel durchführen.

1.2.2 Mathematische Randbedingungen: Die selbstadjungierte Fredholm-Grassmannsche

Wir folgen hier Lesch und Kirk [9]. Sei $\pi : E \rightarrow M$ ein komplexes hermitesches Vektorbündel über einer kompakten, glatten Mannigfaltigkeit M . M besitze einen Kragen der Form $\partial M \times [0, \varepsilon[$. In einer Umgebung des Randes verschwindet also eine Hauptkrümmung.

Wir betrachten symmetrische Diracoperatoren $D : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(E)$ mit Produktschreibweise

$$D|_{\text{Kragen}} = \gamma(\partial_x + A).$$

$\gamma : E|_{\partial M} \rightarrow E|_{\partial M}$ ist hier ein Bündelendomorphismus und $A : C^\infty(E|_{\partial M}) \rightarrow C^\infty(E|_{\partial M})$ ein selbstadjungierter, elliptischer Differentialoperator erster Ordnung unabhängig von x (Tangentialoperator). Wir fordern weiterhin

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -\mathbb{1}, & \gamma^\dagger &= -\gamma, \\ \{\gamma, A\} &= 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

($\{\bullet, \bullet\}$ bezeichnet den Antikommutator).

Wir erweitern D auf den Raum $H_1(E)$ der einmal schwach ableitbaren Schnitte von E (D ist ja nur von erster Ordnung). Es ist jetzt also $D : H_1(E) \rightarrow L^2(E)$. Eine Randbedingung wird durch Angabe einer orthogonalen Projektion $P : L^2(E|_{\partial M}) \rightarrow L^2(E|_{\partial M})$ festgelegt, siehe zum Beispiel (1.3).

Wir benötigen im folgenden die positive Spektralprojektion

$$P_{>0} : L^2(E|_{\partial M}) \rightarrow L^2(E|_{\partial M}).$$

Diese bildet Eigenspinoren von A mit positivem Eigenwert auf sich selbst, solche mit negativem Eigenwert auf 0 ab. Durch diese Forderungen ist sie auch festgelegt.

In [9] definieren Lesch und Kirk die selbstadjungierte Fredholm-Grassmannsche $\text{Gr}(A)$ als die Menge von Abbildungen $P : L^2(E|_{\partial M}) \rightarrow L^2(E|_{\partial M})$ mit den Eigenschaften

1. P ist pseudodifferentiell von Ordnung 0,
2. $P = P^\dagger$, $P^2 = P$,
3. $\gamma P \gamma^\dagger = \mathbb{1} - P$,

4. $P_{>0}|_{\text{Bild } P} : \text{Bild } P \rightarrow \text{Bild } P_{>0}$ hat endlich-dimensionalen Kern und endlich-dimensionalen Kokern ($\text{Bild } P_{>0}|_{\text{Bild } P}/\text{Bild } P_{>0}$), was bedeutet, daß $(P_{>0}, P)$ ein Fredholm-Paar ist.

Nach Lesch und Kirk ist (D, P) für $P \in \text{Gr}(A)$ selbstadjungiert und fredholmsch. Das Spektrum ist diskret und jeder Eigenwert hat endliche Vielfachheit.

1.2.3 Beispiel 1: Die Halbebene, masseloses Teilchen

Um unser Beispiel in die mathematische Theorie einbetten zu können, überprüfen wir zunächst die Gültigkeit der Voraussetzungen von Abschnitt 1.2.2. Zunächst stellen wir fest, daß die rechte Halbebene, die wir mit M identifizieren, zwar glatt aber nicht kompakt ist. Als Folge dessen ist auch ∂M nicht geschlossen. Unsere Mannigfaltigkeit besitzt aber einen Kragen. Dieser umfaßt sogar die ganze Halbebene, da ihre Krümmung senkrecht zum Rand überall verschwindet.

Wir betrachten nur den einfachen Diracoperator $D = -i\sigma_x\partial_x - i\sigma_y\partial_y$. Es gilt

$$D = \underbrace{-i\sigma_x\partial_x}_{=\gamma} + \underbrace{\sigma_x\sigma_y\partial_y}_{=A}.$$

Offenbar ist $\gamma^2 = -\mathbb{1}$ und $\gamma^\dagger = -\gamma$. Die Gültigkeit der Forderung (1.6) rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} \gamma A &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\partial_y & 0 \\ 0 & -i\partial_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_y \\ \partial_y & 0 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & -i(-i\partial_y) \\ -i(i\partial_y) & 0 \end{pmatrix} = -A\gamma. \end{aligned}$$

Wir fouriertransformieren A , um Eigenwerte und Eigenvektoren zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} i\partial_y & 0 \\ 0 & -i\partial_y \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk \begin{pmatrix} a(k) \\ b(k) \end{pmatrix} e^{iky} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(k) \\ b(k) \end{pmatrix} e^{iky}.$$

Die Eigenwerte sind also $E_{\pm} = \pm k$. Wie man leicht sieht, sind Eigenspinoren zum Beispiel

$$v_{k-} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iky} \quad \text{und} \quad v_{k+} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iky}.$$

$P_{>0}$ erhält hierdurch bezüglich der uneigentlichen Basis $\{\vec{e}_x e^{iky}, \vec{e}_y e^{iky} | k \in \mathbb{R}\}$ von $L^2(y\text{-Achse} \times \mathbb{C}^2)$ die einfache Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}. \quad (1.7)$$

$e_{x,y} : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ ist hierbei als Orthonormalrahmen von $E = M \times \mathbb{C}^2$ anzusehen. Dieser liegt auch allen anderen im folgenden als Tupel angegebenen Spinoren und als Matrix angegebenen Operatoren zugrunde.

Wir wollen jetzt überprüfen, ob unser Projektor P aus Gleichung (1.3) in der Grassmannschen liegt. Wir rechnen dazu die Eigenschaften 1.-4. von Seite 20 nach.

1. $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ ist offenbar von nullter Ordnung.

2. $P = P^\dagger$ offensichtlich, $P^2 = P$ offensichtlich.

3.

$$\begin{aligned} \gamma P \gamma^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - P \end{aligned}$$

4. Zu zeigen ist: $(P_{>0}, P)$ bilden ein Fredholmpaar. Es ist

$$\text{Bild } P = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Also ist

$$[P_{>0} | \text{Bild } P]_{\{ie_x + e_y\}, \{e_y\}} = (1).$$

Wir haben hier die zur Matrixbildung benutzten Orthonormalrahmen von Definitions- und Zielbündel als Index geschrieben. Der Kern dieses Operators ist $\{0\}$, also endlich-dimensional. Der Kokern ist

$$\text{Bild } P_{>0} / \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle / \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{[0]\},$$

also auch endlich-dimensional.

Damit ist $P \in \text{Gr}(A)$.

1.2.4 Beispiel 1a: Die Halbebene, massives Teilchen

Wir betrachten hier den Diracoperator

$$D = -i\sigma_x\partial_x - i\sigma_y\partial_y + m\sigma_z.$$

Wir lesen γ und A (siehe Abschnitt 1.2.2) ab:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} i\partial_y & -im \\ im & -i\partial_y \end{pmatrix}.$$

Fouriertransformation von A liefert $\begin{pmatrix} -k & -im \\ im & k \end{pmatrix}$. Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{k^2 + m^2}$, Eigenvektoren

$$v_+ = \begin{pmatrix} -im \\ k + \lambda_+ \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} -im \\ k + \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Die positive Spektralprojektion hat jetzt also keine einfache Form mehr. Wir können sie allerdings noch bezüglich der uneigentlichen Basis

$$\{e^{iky} \otimes e_x, e^{iky} \otimes e_y | k \in \mathbb{R}\}$$

von $L^2(y\text{-Achse} \times \mathbb{C}^2)$ aufschreiben. Dazu müssen wir nur ein 4×4 -Gleichungssystem lösen. Das Ergebnis ist:

$$[P_{>0}] = \frac{1}{2\lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_+ - k & -im \\ im & k + \lambda_+ \end{pmatrix}.$$

Jetzt können wir die Zugehörigkeit von P aus (1.3) zu $\text{Gr}(A)$ überprüfen, indem wir wie in Abschnitt 1.2.3 die Eigenschaften 1.-4. von Seite 20 nachweisen.

1.-3. P und γ sind genau wie in Abschnitt 1.2.3. Die Argumentation ist folglich die selbe.

4. Fredholmpaar-Eigenschaft von $(P_{>0}, P)$. Die positive Spektralprojektion muß jetzt auf Bild P , mit $[P] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, eingeschränkt werden.

Es ist, mit $P_{>0}|_{\text{Bild } P} : \text{Bild } P \rightarrow L^2(E)$,

$$\begin{aligned} [P_{>0}|_{\text{Bild } P}]_{\{(ie_x+e_y)\otimes e^{iky}\},\{e_x\otimes e^{iky},e_y\otimes e^{iky}\}} &= \frac{1}{2\lambda_+} \begin{pmatrix} i(\lambda_+ - k - m) \\ \lambda_+ + k - m \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - \lambda_+}{2m} \begin{pmatrix} -im \\ k + \lambda_+ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$P_{>0}|_{\text{Bild } P} : \text{Bild } P \rightarrow \text{Bild } P_{>0}$$

bestimmt durch

$$[P_{>0}|_{\text{Bild } P}]_{\{(ie_x+e_y)\otimes e^{iky}\},\{(-ime_x+(k+\lambda_+)e_y)\otimes e^{iky}\}} = \left(\frac{1-\lambda_+}{2m}\right),$$

wobei die verwendeten Orthonormalrahmen wieder als Index geschrieben sind. Der Kern dieser Abbildung ist offenbar $\{0\}$. Noch zu berechnen ist der Kokern von $P_{>0}|_{\text{Bild } P} : \text{Bild } P \rightarrow \text{Bild } P_{>0}$. Es ist

$$\text{Bild } P_{>0} / \text{Bild } P_{>0}|_{\text{Bild } P} = \left\langle \begin{pmatrix} -im \\ k + \lambda_+ \end{pmatrix} \right\rangle / \left\langle \frac{1-\lambda_+}{2m} \begin{pmatrix} -im \\ k + \lambda_+ \end{pmatrix} \right\rangle = \{[0]\}$$

wiederum endlichdimensional. Damit ist die Fredholmpaar-Eigenschaft von $(P_{>0}, P)$ gezeigt.

1.2.5 Beispiel 2: Die Kreisscheibe, masseloses Teilchen

Die Einheitskreisscheibe ist eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit. Ihr Rand ist der glatte, kompakte Einheitskreis. Die Einheitskreisscheibe besitzt keinen Kragen. Dieses Problem werden wir ignorieren. Wir wollen jetzt untersuchen, ob und wie die in Abschnitt 1.1.4 gefundenen Randbedingungen in die mathematische Theorie passen.

Produktschreibweise für den Diracoperator

Wir betrachten den Diracoperator

$$D = -i(\cos \phi \sigma_x + \sin \phi \sigma_y)\partial_r - \frac{i}{r}(-\sin \phi \sigma_x + \cos \phi \sigma_y)\partial_\phi$$

aus dem Kontinuumslimites des Chalker-Coddington-Modells. Dieser ist auf die Form $\gamma(\partial_r + A)$ zu bringen. Wir lesen

$$\begin{aligned} \gamma &= -i \sin \phi \sigma_y - i \cos \phi \sigma_x, \\ A &= i \sigma_z \partial_\phi \end{aligned} \tag{1.8}$$

ab. Es gilt offenbar $\gamma^2 = -\mathbb{1}$ und $\gamma^\dagger = -\gamma$. Lesch und Kirk fordern außerdem $\{\gamma, A\} = 0$. Das trifft hier nicht zu, denn

$$\begin{aligned}\{\gamma, A\} &= [(\sin \phi \sigma_y + \cos \phi \sigma_x) \sigma_z \partial_\phi + \\ &\quad + \sigma_z (\cos \phi \sigma_y + \sin \phi \sigma_x) \partial_\phi - \sin \phi \sigma_x + \cos \phi \sigma_y] \\ &= \sigma_z (\cos \phi \sigma_y - \sin \phi \sigma_x) \neq 0.\end{aligned}$$

Grassmannsche für ein masseloses Diracfermion

Zunächst ist die positive Spektralprojektion $P_{>0}$ zum Tangentialoperator (1.8) aus Abschnitt 1.2.5 zu berechnen. Wir fouriertransformieren A mit Hilfe der Orthonormalbasis

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_x e^{ik\phi}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_y e^{ik\phi} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} :$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Die positive Spektralprojektion liest man analog zu Abschnitt 1.2.3 ab:

$$P_{>0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In 1.1.4 haben wir als sinnvolle lokale Randbedingungen unter anderem $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ identifiziert (ein verschwindender Halbspinor). Diese lassen sich nicht in die Form $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & T^\dagger \\ T & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ bringen und liegen damit nach Lemma 2.6 aus [9] nicht in $\text{Gr}(A)$. Die Bedingung, daß der Spinor am Rand konstant sein muß, läßt sich so als Matrix schreiben:

$$\begin{pmatrix} \partial_\phi & 0 \\ 0 & \partial_\phi \end{pmatrix}.$$

Diese Randbedingung ist nicht pseudodifferentiell von nullter Ordnung.

Im Gegensatz zu den beiden bisher besprochenen Randbedingungen liegt (1.5) für $\alpha = \pm 1$ in $\text{Gr}(A)$. Bringen wir (1.5) zunächst auf Standardform:

$$P := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \pm i e^{-i\phi} \\ \mp i e^{i\phi} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen explizit die Zugehörigkeit dieser Abbildung zur Fredholm-Grassmannschen. P ist pseudodifferentiell von Ordnung 0. Es sind $P^2 = P$ und $P^\dagger = P$, also ist P eine orthogonale Projektion. Es gilt

$$\begin{aligned}\gamma P \gamma^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i e^{-i\phi} \\ \pm i e^{i\phi} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{1} - P,\end{aligned}$$

also ist die dritte Bedingung von Seite 20 erfüllt. Wir müssen noch Kern und Kokern der positiven Spektralprojektion eingeschränkt auf das Bild von P , $P_{>0}|_{\text{Bild } P} : \text{Bild } P \rightarrow \text{Bild } P_{>0}$, betrachten. Das Bild von P ist die lineare Hülle von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i e^{i\phi} \end{pmatrix}.$$

$P_{>0}$ darauf eingeschränkt hat bezüglich der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i e^{i\phi} \end{pmatrix} \right\}$ von $\text{Bild } P$ und der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ von $\text{Bild } P_{>0}$ die Matrix

$$(1).$$

Der Kern dieser Matrix ist $\{0\}$, also ist der Kern von $P_{>0}|_{\text{Bild } P}$ null- und damit endlichdimensional. Der Kokern ist ebenfalls $\{0\}$, denn es ist $\text{Bild } P_{>0} = \text{Bild } P_{>0}|_{\text{Bild } P}$. Also bilden $(P_{>0}, P)$ ein Fredholmpaar. P erfüllt damit auch die vierte Bedingung von Seite 20 und ist so Element der Fredholm-Grassmannschen $\text{Gr}(A)$.

1.2.6 Beispiel 3: Die Hemisphäre

Die obere Halbkugelschale H ist eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit. Wir können sie mit einem Kreiszyklindermantel verkleben, und das Resultat ist immer noch glatt und kompakt. Diese Mannigfaltigkeit hat dann auch den von Lesch und Kirk geforderten Kragen, so daß – im Gegensatz zu den vorangegangenen Beispielen – alle Voraussetzungen der mathematischen Theorie an die Basismannigfaltigkeit erfüllt sind.

Welcher Diracoperator entspricht den bisher besprochenen?

Beim Versuch, das quadratische, diskrete Chalker-Coddington-Modell auf die Sphäre zu übertragen, ergeben sich durch die Krümmung im Netzwerk Ver-satzstellen. Diese bestehen je nach Vorgehensweise zum Beispiel aus Links

mit unklarer Chiralität oder aus dreieckigen Plaketten. Dies macht den Kontinuumsliches technisch schwierig. Ein ähnliches Problem ergibt sich für ein Chalker-Coddington-Modell, dem ein Dreiecksgitter zugrunde liegt: Hier ist die Gleichheit der Längen der Verbindungsstücke nicht gewährleistet. Außerdem variiert die Zahl der Verbindungsstücke, die einen gegebenen Knoten als Anfangs- beziehungsweise Endpunkt haben.

Aufgrund der vielfältigen technischen Probleme versuchen wir, den Diracoperator aus dem Kontinuumsliches des Chalker-Coddington-Modells in der Ebene direkt auf die Sphäre zu übertragen. Da dieser ohne Massen-, Skalar- und Eichpotentialanteile dem Spin-Diracoperator

$$D = -i\sigma_y\partial_x + i\sigma_x\partial_y$$

ähnelt (siehe (1.2)), konstruieren wir zunächst den Spin-Diracoperator der Sphäre.

S^2 hat konstante aber nicht-verschwindende Krümmung. Wir müssen unseren Diracoperator an die veränderte Metrik anpassen. Dazu parametrisieren wir zunächst die Hemisphäre, eingebettet in den dreidimensionalen euklidischen Raum:

$$H :]0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3, (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Das Tangentialbündel TH ist also gegeben durch

$$T_{(\theta, \phi)}H = H(\theta, \phi) + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Die Metrik auf TH ist folglich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi.$$

Die entsprechende Metrik auf dem Kotangentialbündel ist dann $\partial_\theta \otimes \partial_\theta + \sin^{-2} \theta \partial_\phi \otimes \partial_\phi$. Wir schreiben beide Metriken (\bullet, \bullet) .

Vorgehensweise. Wir konstruieren den Spin-Diracoperator auf der Sphäre nach [4], Kapitel 3. Wir möchten die Formel

$$D_{\text{spin}} = \sum_{j=1}^2 c(v^j) \nabla_{v_j}^S \tag{1.9}$$

verwenden. ∇^S ist der Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Spinorbündel, c ist die Cliffordmultiplikation, v_j ist ein Orthonormalrahmen von TH . Wir folgen dem Konstruktionsprogramm aus Abschnitt 1.2.1.

Cliffordmultiplikation

Das Cliffordbündel der Sphäre bezeichnen wir mit $\pi^{CH} : CH \rightarrow H$. Für ein $x \in H$ ist

$$(\pi^{CH})^{-1}(x) := C(T_x^*H) := (\langle 1, v, w, v \cdot w \rangle, \cdot),$$

wenn $\{v, w\}$ eine Basis von T_x^*H ist und $\langle \dots \rangle$ für die lineare Hülle von \dots steht. Der Punkt soll die Eigenschaft $v \cdot w + w \cdot v = -2\langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in T_x^*H$ haben, vergleiche Anhang A.1.

Wir wählen die Orthonormalbasis

$$\{d\theta, \sin \theta d\phi\}$$

von T^*H , die von außerhalb der Sphäre betrachtet im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Wir definieren $e^1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(d\theta - i \sin \theta d\phi)$, $e^2 := \overline{e^1}$. Sie bilden eine orientierte Basis von $T^*H \otimes \mathbb{C}$. Durch Einsetzen verifizieren wir: $(e^1, e^1) = 0$. Dabei haben wir die reelle Bilinearität der Metrik durch komplexe Bilinearität ersetzt. Damit ist $P := \langle e^1 \rangle$ eine Polarisierung von T^*H .

Wir verwenden, Berline, Getzler und Vergne folgend, $\mathcal{S} := \Lambda(P) = (\langle 1, e^1 \rangle, \wedge)$ als Spinorbündel. Das Cliffordbündel wirkt auf dem Spinorbündel in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} c(e^1) &:= \sqrt{2}\varepsilon(e^1) \\ c(e^2) &:= -\sqrt{2}\iota(e^2). \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon(\alpha)$ ist das äußere Produkt mit der 1-Form α gemeint: “ $\varepsilon(\alpha) = \alpha \wedge \bullet$ ”, mit $\iota(\alpha)$ das innere Produkt: “ $\iota(\alpha) = (\alpha, \bullet)$ ”.

Wir sehen nun:

$$\begin{aligned} c(e^1)1 &= \sqrt{2} \cdot e^1, \\ c(e^1)e^1 &= 0, \\ c(e^2)1 &= 0, \\ c(e^2)e^1 &= -\sqrt{2} \cdot 1. \end{aligned}$$

Interpretiert man 1 als “Spin im Uhrzeigersinn” und e^1 als “Spin gegen den Uhrzeigersinn”, so sind die $c(e^i)$ bis auf konstante Vorfaktoren die aus der Physik bekannten Spin-Flip-Operatoren.

Durch Linearkombination von $c(e^1)$ und $c(e^2)$ ergeben sich als Bilder des Kotangentialbündelrahmens die Paulimatrizen:

$$[c(d\theta)]_{\{1,e^1\}} = -i\sigma_y \text{ und } [c(\sin\theta d\phi)]_{\{1,e^1\}} = i\sigma_x. \quad (1.10)$$

Die Cliffordmultiplikation c und das Spinorbündel \mathcal{S} sind jetzt vollständig bestimmt und mit Bedeutung versehen.

Levi-Civita-Zusammenhang auf \mathcal{S}

Der Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Tangentialbündel der Sphäre ist

$$\nabla(\partial_\theta) = \cot\theta \partial_\phi \otimes d\phi, \quad \nabla(\sin^{-1}\theta \partial_\phi) = -\cos\theta \partial_\theta \otimes d\phi,$$

wie man aus der Definition in Anhang A.2 errechnen kann. Die Zusammenhangskoeffizienten ω_{ij}^k (siehe ebenfalls Anhang A.2) sind

$$(\omega_{\theta j}^i)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } (\omega_{\phi j}^i)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach (A.3) bestimmt

$$\nabla_{\partial_\theta}^{\mathcal{S}} = \partial_\theta, \quad \nabla_{\partial_\phi}^{\mathcal{S}} = \partial_\phi - \frac{1}{4} \cos\theta [c(e^\phi)c(e^\theta) - c(e^\theta)c(e^\phi)]$$

den Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Spinorbündel.

Der Spin-Diracoperator

Der Spindiracoperator

$$\begin{aligned} D_{\text{spin}} &= c(d\theta)\nabla_{\partial_\theta}^{\mathcal{S}} + c(\sin\theta d\phi)\nabla_{\sin^{-1}\theta \partial_\phi}^{\mathcal{S}} \\ \Rightarrow [D]_{\{1,e^1\}} &= -i\sigma_y \left(\partial_\theta + \frac{\cot\theta}{2} \right) + \sigma_x \frac{i}{\sin\theta} \partial_\phi \end{aligned}$$

ergibt sich durch Einsetzen der Cliffordmultiplikation und des Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Spinorbündel in (1.9). Dieser Operator respektiert die Symmetrie der Sphäre. Betrachten wir D_{spin} auf dem Äquator und setzen ihn dort auf eine Tangentialebene mit kartesischen Koordinaten

$$\partial_x|_{\ddot{\text{Äquator}}} = \partial_\phi|_{\ddot{\text{Äquator}}}, \quad \partial_y|_{\ddot{\text{Äquator}}} = -\partial_\theta|_{\ddot{\text{Äquator}}}$$

fort, so erhalten wir

$$D_{\text{spin,tangential}} = i\sigma_y\partial_y + i\sigma_x\partial_x.$$

$-D_{\text{spin,tangential}}$ entspricht also dem Diracoperator (1.2) für das Chalker-Coddington-Modell ohne Massen-, Skalar- und Eichpotentialterme. Er ist bezüglich des euklidischen Raumwinkelmaß

$$\sin\theta\,d\theta\wedge d\phi$$

hermitesch auf der Sphäre. Für die Halbsphäre H liefert die explizite Rechnung die Hermitezitätsbedingung

$$\int_{\partial H} (\bar{\psi}_3\chi_1 - \bar{\psi}_1\chi_3)\,d\phi = 0.$$

Auf Spinoren ψ , die auf ∂H

$$\psi_1 = \psi_3$$

erfüllen, ist D also hermitesch. Diese Randbedingung ähnelt denen, die wir für den Kontinuumsfall des Chalker-Coddington-Modells auf Kreisscheibe und Halbebene gefunden haben. Insgesamt betrachten wir daher $-D_{\text{spin}}$ als Diracoperator für das Chalker-Coddington-Modell auf der Sphäre.

1.2.7 Der Calderón-Projektor P_M

Der nächste Schritt in der mathematischen Theorie aus [9] besteht in der Definition des Calderón-Projektors P_M . Dazu definieren wir zunächst den Cauchydatenraum L_M . Es handelt sich um die Einschränkung auf den Rand von M derjenigen Spinoren, die im Kern des betrachteten Diracoperators D liegen:

$$L_M := r(\ker(D : H_{1/2}(E) \rightarrow H_{-1/2})) \subset L^2(E|_{\partial M}). \quad (1.11)$$

P_M ist nun definiert als die orthogonale Projektion auf den Cauchydatenraum.

1.2.8 Der Calderón-Projektor für ein masseloses Diracfermion auf der Halbebene

Wir betrachten den Diracoperator

$$D = -i\sigma_x\partial_x - i\sigma_y\partial_y = \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_x - \partial_y \\ -i\partial_x + \partial_y & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Cauchydatenraum

Wir müssen den Kern von $D : H_{1/2}(E) \rightarrow H_{-1/2}(E)$ berechnen. Betrachte dazu $\psi \in L^2(E)$ beliebig. ψ hat die Fourierdarstellung

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x, y) \\ \psi_2(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(k, q) \\ \hat{\psi}_2(k, q) \end{pmatrix} e^{ikx+iqy} dk dq.$$

Jetzt ist $\psi \in \ker D$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} D\psi &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q = ik & \text{für } \psi_1 \\ q = -ik & \text{für } \psi_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Somit spannt

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{kx+iky} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{kx-iky} \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.12)$$

den Kern von D auf.

Einschränkung auf $H_{1/2}(E)$. Definieren wir zunächst den $1/2$ -ten Sobolevraum zu einem Bündel E . Ist l eine positive ganze Zahl, dann ist der l -te Sobolevraum

$$H_l(E) := \{ \psi \in L^2(E) \mid \partial^\alpha \psi \in L^2(E) \text{ für jeden Multiindex } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq l \}.$$

Das ist äquivalent zu

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \int_M |\partial^\alpha \psi|^2 dx = \int_M \sum_{|\alpha| \leq l} |\partial^\alpha \psi|^2 dx < \infty.$$

Erfüllt die Fouriertransformierte $\hat{\psi}$ die Bedingung

$$\int_{\mathcal{FM}} d^2k |\hat{\psi}|^2 (1 + |k|^2)^l < \infty, \quad (1.13)$$

so ist die obige Bedingung für ψ erfüllt und umgekehrt. Die Bedingung an die Fouriertransformierte läßt sich auf rationale l ausdehnen. Damit ist $H_{1/2}(E)$ definiert.

Der $1/2$ -te Sobolevraum zu unserem Bündel $E := \text{rechte Halbebene} \times \mathbb{C}^2$ ist also Teilraum von $L^2(E)$. Quadratintegrabilität von $\psi \in H_{1/2}(E)$ schränkt unser Erzeugendensystem (1.12) ein auf

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{kx+iky} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{kx-iky} \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R}_- \right\}.$$

Einschränkung auf $E|_{\partial M}$ ergibt den Cauchydatenraum. Dieser ist festgelegt durch die uneigentliche Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{iky} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-iky} \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R}_- \right\}$$

sowie (1.13) mit $l = 1/2$ und $M = y$ -Achse.

Zum Calderón-Projektor

Um uns dem Calderón-Projektor P_M zu nähern, berechnen wir zunächst seine Wirkung auf $\psi := \begin{pmatrix} e^{iqy} \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei

$$P_M \psi = \int_{\mathbb{R}_+} dk \begin{pmatrix} (P_M)_{11}(q, k) e^{-iky} \\ (P_M)_{21}(q, k) e^{iky} \end{pmatrix}.$$

Das ist sinnvoll, da P_M auf $r(\ker D : H_{1/2}(E) \rightarrow H_{-1/2}(E))$ projizieren soll. Da P_M eine orthogonale Projektion sein soll, muß $P_M \psi \perp P_M \psi - \psi$, also $\langle P_M \psi, P_M \psi \rangle = \langle \psi, P_M \psi \rangle$ sein. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\begin{aligned} \langle \psi, P_M \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}_+} dk (P_M)_{11}(q, k) e^{-i(k+q)y} \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} dk (P_M)_{11}(q, k) \delta(k+q) \\ &= 2\pi (P_M)_{11}(q, -q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle P_M \psi, P_M \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}_+} dk \int_{\mathbb{R}_+} dk' [\overline{(P_M)_{11}(q, k)} (P_M)_{11}(q, k') + \\ &\quad + \overline{(P_M)_{21}(q, k)} (P_M)_{21}(q, k')] e^{i(k-k')y} \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} dk (|(P_M)_{11}(q, k)|^2 + |(P_M)_{21}(q, k)|^2). \end{aligned}$$

Leider ist das die expliziteste Form, in die ich den Calderón-Projektor bringen kann. Die Rechnung mit massivem Diracoperator ist umständlicher und die zu lösende Integralgleichung und zu erfüllende Forderung sind strukturell gleich, aber komplizierter aufzuschreiben.

Kapitel 2

Punktkontakte, Leitwerte und Dichtekorrelationen

2.1 Punktkontakte für Diracteilchen in zwei Dimensionen

2.1.1 Punktkontakt im Chalker-Coddington-Modell

Am diskreten Chalker-Coddington-Modell aus [5], vorgestellt in Abschnitt 1.1.3, läßt sich ein Punktkontakt anbringen. Die genaue Vorgehensweise wird in [8] erklärt:

Ein Link wird in zwei Stücke geteilt. Durch die Orientierung des Links ist eines als einlaufend, das andere als auslaufend festgelegt. Wir können nun zum Beispiel einen bestimmten Wahrscheinlichkeitsstrom in das System einführen. Wir können die beiden Stücke aber auch aus dem System heraus idealleitend verlängern und in einigem Abstand kurzschließen. Zu den verschiedenen Punktkontakten siehe Abbildung 2.1.

Wir wollen nun ein Analogon zu diesen Punktkontakten im diskreten Modell im von Chalker und Ho in [5] gefundenen Kontinuumsmodell suchen. Zu diesem Zweck studieren wir zunächst eine klassische Version des Chalker-Coddington-Netzwerks.

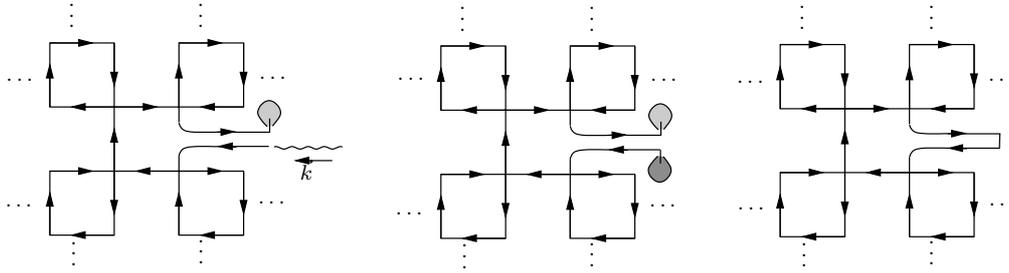


Abbildung 2.1: Verschiedene Punktkontakte im Chalker-Coddington-Modell. Links werden Teilchen fester Energie in das Netzwerk geschossen, während alle am Ausgang ankommenden Teilchen von einem Reservoir absorbiert werden. In der Mitte werden aus einem Reservoir Teilchen zufälliger Energie in das System gestreut. Rechts wird der Punktkontakt kurzgeschlossen, durchfließende Wahrscheinlichkeitsdichte erhält dadurch eine zusätzliche Phase.

2.1.2 Punktkontakt im klassischen Chalker-Coddington-Modell

Wir möchten den klassischen Fall numerisch studieren. Zu diesem Zweck werden wir zuerst ein klassisches Analogon zum Chalker-Coddington-Modell identifizieren. Danach werden wir einen Spezialfall numerisch simulieren. Abschließend werden kurz dessen Eigenschaften beschrieben.

Wir betrachten ein quadratisches Netzwerk aus Links, auf dem sich klassische Teilchen wechselwirkungsfrei bewegen. Die Verwandtschaft zum Chalker-Coddington-Modell ergibt sich aus der Abbiegevorschrift an Knoten. Wie bei Chalker und Coddington biegen unsere Teilchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, w , nach links ab. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ_1 auf einer Verbindung 1 zu einem gegebenen Zeitpunkt t (die Zeit ist diskret, da wir numerisch arbeiten wollen) ergibt sich also aus den Wahrscheinlichkeitsdichten auf den Zubringerlinks ρ_2 und ρ_3 zum Zeitpunkt $t-1$. Die Zubringerlinks sind alle Links, die am Anfangsknoten von 1 enden. Quantitativ:

$$\rho_1(t) = w \cdot \rho_2(t-1) + (1-w) \cdot \rho_3(t-1),$$

wenn die von ρ_2 kommenden Teilchen nach links auf ρ_1 abbiegen.

Wir betrachten nun ein Netzwerk von 500×500 Links, das mit reflektierenden Rändern ausgestattet wird. Das Netzwerk wird folgendermaßen mit einer Anfangsdichte versehen: Auf dem Link an einem Punkt K_2 , der sich nahe

der Mitte des Netzwerks befindet, wird die Dichte auf Null gesetzt. Den Spiegelpunkt zu K_2 bezüglich der Mitte des Systems bezeichnen wir mit K_1 . Hier setzen wir die Dichte auf einen konstanten Wert a . Abseits von K_1 und K_2 setzen wir die Dichte auf $a/2$. Nun führen wir die beschriebene Zeitentwicklung durch und setzen danach die Dichten bei K_1 und K_2 auf ihren Anfangswert zurück.

Zur Ermittlung der Dichteverteilung nach N Zeitentwicklungsschritten wird ein Computerprogramm geschrieben. Eine Zeichnung des Graphen der Dichteverteilung für einen bestimmten Parametersatz findet sich in Abbildung 2.2.

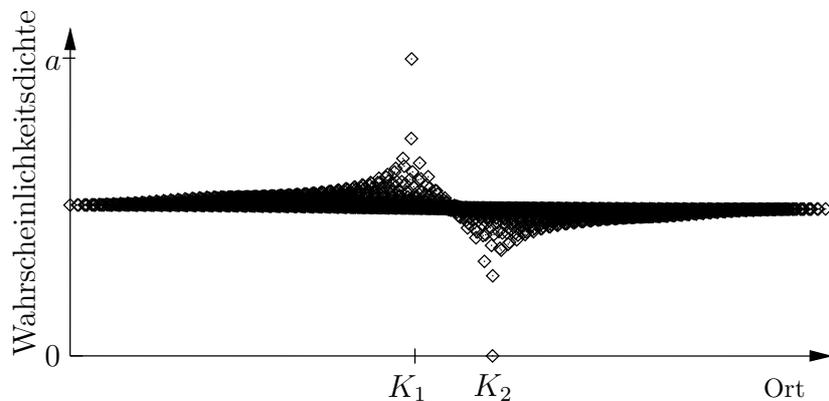


Abbildung 2.2: Wahrscheinlichkeitsdichte im klassischen Fall (Seitenansicht). Der Abstand zwischen den Punktkontakten beträgt ungefähr 80 Knoten. Die Abbiegewahrscheinlichkeit ist $w = 1/2$. Es wurden $N = 50000$ Zeitentwicklungsschritte durchgeführt.

Wir mutmaßen nun, daß ein Punktkontakt im quantenmechanischen Kontinuumslimes mit einer Singularität von Spinor und Wahrscheinlichkeitsdichte am Kontakt einhergehen wird. Wir nehmen weiterhin an, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte wie $1/r$ abfallen wird, wenn r der Abstand vom Kontakt ist.

2.1.3 Lösung der Diracgleichung auf einem punktierten Teilgebiet der Ebene

In diesem Abschnitt lösen wir die Diracgleichung auf einem Teilgebiet der punktierten Ebene. Zunächst formulieren wir das Problem in Polarkoordi-

naten. Aus der Forderung nach Wahrscheinlichkeitserhaltung berechnen wir die Wahrscheinlichkeitsstromdichte. Diese erlaubt uns, den Drehimpulsoperator bezüglich des Polarkoordinatenursprungs sowie dessen Eigenraum zu bestimmen. Damit können wir die Diracgleichung auf Besselsche Differentialgleichungen zurückführen. Der Abschnitt endet mit einer Besprechung der Eigenschaften der gefundenen Lösungen.

Polarkoordinaten für den Kontinuumslikes

Um die im Abschnitt 2.1.2 vermutete Singularität der Wahrscheinlichkeitsdichte zu ermöglichen, führen wir Polarkoordinaten (r, ϕ) mit $r =$ Abstand zum Kontakt und $\phi =$ Winkel zwischen Ortsvektor des betrachteten Punkts und der x -Achse ein. Der Zusammenhang zwischen (x, y) und (r, ϕ) wird vermittelt durch

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\phi), \\y &= r \sin(\phi).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Eine kurze Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}\partial_\phi &= x\partial_y - y\partial_x, \\ \partial_r &= \frac{x\partial_x + y\partial_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \partial_x &= \cos(\phi)\partial_r - \frac{\sin(\phi)}{r}\partial_\phi, \\ \partial_y &= \sin(\phi)\partial_r + \frac{\cos(\phi)}{r}\partial_\phi.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Wir können auch noch komplexe Koordinaten auf der Ebene einführen: $z = x + iy, \bar{z}$. Die Übersetzung von x, y nach z, \bar{z} und zurück ist klar. Bezüglich der Übersetzung z, \bar{z} nach r, ϕ sind folgende Gleichungen nützlich:

$$\begin{aligned}\partial_z &= \frac{e^{-i\phi}}{2}\partial_r + \frac{e^{-i\phi}}{2ir}\partial_\phi, \\ \partial_{\bar{z}} &= \frac{e^{i\phi}}{2}\partial_r - \frac{e^{i\phi}}{2ir}\partial_\phi.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Wir betrachten nun den Standard-Diracoperator aus (1.2). In Matrixschreibweise und komplexen Koordinaten lautet er

$$D = -2i \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix},$$

und in Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi}\partial_r - \frac{e^{-i\phi}}{r}\partial_\phi \\ -ie^{i\phi}\partial_r + \frac{e^{i\phi}}{r}\partial_\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte und radialer Wahrscheinlichkeitsstrom

In diesem Unterabschnitt berechnen wir die Wahrscheinlichkeitsstromdichte, die uns erlauben wird, den Drehimpulsoperator unseres Systems zu bestimmen. Wir berechnen eine Formel für den Wahrscheinlichkeitsstrom in ein kreisförmiges Gebiet, die wir für die analytische Lösung der Diracgleichung aber nicht benötigen.

Zunächst berechnen wir den Wahrscheinlichkeitsstrom für einen stationären Zustand aus den folgenden Forderungen:

1. Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\chi^\dagger \chi [dx \wedge dy, +]) + dj = 0, \quad (2.4)$$

d ist die totale Ableitung im Raum, $[dx \wedge dy, +]$ die orientierte Euklidische Flächenform¹.

2. Gültigkeit der zeitabhängigen Diracgleichung: $D\chi = -id_t\chi$.

Eine kurze Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\chi^\dagger \chi [dx \wedge dy, +]) &= 2\Im (\chi^\dagger (D\chi)) [dx \wedge dy, +] \\ &= -d\Im [(i\bar{\chi}_1\chi_3 + i\bar{\chi}_3\chi_1) [dy, +] - (\bar{\chi}_1\chi_3 - \bar{\chi}_3\chi_1) [dx, +]] \\ &= -d\Re [(\chi^\dagger \sigma_x \chi) [dy, +] - (\chi^\dagger \sigma_y \chi) [dx, +]] \end{aligned}$$

¹ Hierbei stellt $[Form, +]$ das Versehen einer Differentialform mit der durch den Gegenurzeigersinn gegebenen Orientierung dar. Durch die Einbettung in den \mathbb{R}^3 haben wir festgelegt, aus welcher Richtung wir das System betrachten. Deswegen ist diese Wahl der Orientierung eindeutig.

Daraus und aus (2.4) folgt die Wahrscheinlichkeitsstromdichte.

Wir wollen später in o einen Punktkontakt anbringen. Wir werden uns dann für den Gesamtwahrscheinlichkeitsstrom I zum Ursprung hin interessieren. Wir leiten jetzt eine Formel für I her. Wir legen zu diesem Zweck den Kreis

$$C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto o + R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

um den Ursprung. Diesen kombinieren wir mit der Orientierung ‘‘Gegenuh-
zeigersinn’’ und erhalten eine außen orientierte 1-Kette, deren Orientierung
ins Innere des Kreises weist. Der Gesamtfluß ergibt sich zu

$$\begin{aligned} I &= \int_C (j_y dx - j_x dy) \\ &= -R \int_0^{2\pi} (j_y(R, t) \sin(t) + j_x(R, t) \cos(t)) dt. \end{aligned}$$

Mit den Vereinfachungen

$$\begin{aligned} j_x &= 2\Re(\bar{\chi}_1 \chi_3) \\ j_y &= -2\Im(\bar{\chi}_1 \chi_3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

erhält man

$$I = -2R \int_0^{2\pi} (\Im(\bar{\chi}_1 \chi_3)|_{(R,t)} \sin(t) + \Re(\bar{\chi}_1 \chi_3)|_{(R,t)} \cos(t)) dt. \tag{2.6}$$

Drehimpuls

Die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsstromdichte erlaubt es uns, den Drehimpulsoperator \mathcal{L} zu bestimmen. Wir fordern dazu, daß sich Aufenthaltswahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsstromdichte unter Drehung in der natürlichen Weise verhalten. Aus diesen Forderungen ergibt sich eine Gruppe von Transformationen des Spinorraums, deren Generator der Drehimpulsoperator ist. Wir zeigen, daß \mathcal{L} eine Erhaltungsgröße unseres Systems ist. Abschließend berechnen wir Erzeugendensysteme der Eigenräume von \mathcal{L} sowie sein Spektrum.

Aus dem Chalker-Coddington-Modell folgen nach Abschnitt 2.1.3 Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \chi^\dagger \chi$ und Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$j = j_y[dx, +] - j_x[dy, +].$$

Für unsere Zwecke ist es nützlich, j ein Vektorfeld \vec{j} zuzuordnen. Drehen wir nun unser Koordinatensystem um den Winkel $-\alpha$, bei positivem α also mit dem Uhrzeigersinn. Gestrichene Größen beziehen sich auf das rotierte Koordinatensystem. Es muß dann

$$\rho'(r', \phi') = \rho'(r, \phi + \alpha) = \exp[\alpha \partial_\phi] \rho'(r, \phi)$$

sein, folglich

$$\rho'(r, \phi) = \exp[-\alpha \partial_\phi] \rho(r, \phi).$$

Nun ist noch \vec{j} zu betrachten. Wir verwenden die Abkürzungen $S = \sin(\alpha)$, $C = \cos(\alpha)$ und rechnen:

$$\begin{aligned} \vec{j}' &= R(\alpha) \vec{j} \stackrel{(2.5)}{=} 2 \begin{pmatrix} C \Re(\bar{\chi}_1 \chi_3) - S \Im(\bar{\chi}_1 \chi_3) \\ S \Re(\bar{\chi}_1 \chi_3) + C \Im(\bar{\chi}_1 \chi_3) \end{pmatrix} \\ &= 2 \Re \left(\begin{pmatrix} \overline{(\exp[-i\phi/2] \chi_1)} (\chi_3 \exp[i\phi/2]) \\ -i \overline{(\exp[-i\phi/2] \chi_1)} (\chi_3 \exp[i\phi/2]) \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Das der Wahrscheinlichkeitsstromdichte zugeordnete Vektorfeld rotiert also um den Winkel α , wenn der Spinor mit $\exp[-i\phi \frac{\sigma_z}{2}]$ transformiert wird.

Mit der Forderung $\mathcal{D}(R(\alpha)) = \exp[-i\phi \mathcal{L}]$ (mit \mathcal{D} der eben ausgerechneten Darstellung der $SO(2)$ auf dem Spinorraum) ist also

$$\mathcal{L} = -i\partial_\phi + \frac{\sigma_z}{2}. \quad (2.8)$$

\mathcal{L} ist nun eine Erhaltungsgröße unseres Systems, da $\mathcal{L}D = D\mathcal{L}$ ist. Dieser Zusammenhang ist sowohl aufgrund der Analogie zum Paulischen Spin als auch aus Symmetriegründen klar, aber auch leicht nachzurechnen:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}, D] &= -[i(x\partial_x - y\partial_y)\mathbb{1} - \frac{1}{2}\sigma_z, -i\sigma_x\partial_x - i\sigma_y\partial_y] \\ &= -\sigma_x[x\partial_y - y\partial_x, \partial_x] - \sigma_y[x\partial_y - y\partial_x, \partial_y] - \frac{i}{2}[\sigma_z, \sigma_x]\partial_x - \frac{i}{2}[\sigma_z, \sigma_y]\partial_y \\ &= \sigma_x(\partial_y) + \sigma_y(-\partial_x) + \sigma_y\partial_x - \sigma_x\partial_y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zum Abschluß unserer Analyse des Drehimpulsoperators interessieren wir uns noch für Eigenspinoren und Spektrum von \mathcal{L} . Wir gehen analytisch vor

und formulieren die Eigenwertgleichung für \mathcal{L} :

$$\begin{pmatrix} -i\partial_\phi + 1/2 & 0 \\ 0 & -i\partial_\phi - 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_3 \end{pmatrix}.$$

Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen läßt uns folgern, daß sämtliche Lösungen die Form

$$\begin{pmatrix} f(r)e^{i(m-1/2)\phi} \\ g(r)e^{i(m+1/2)\phi} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

annehmen. Die Spinoren sollen stetig sein. Deshalb muß m halbzahlig gewählt werden. Die Spinoren (2.9) werden im folgenden als Basis zur Lösung der Diracgleichung benutzt.

Analytische Lösung der Diracgleichung auf der punktierten Ebene

Wir haben nun das Werkzeug parat, die Diracgleichung analytisch zu lösen. Zunächst werden wir den Umstand ausnutzen, daß wir jede Lösung der Diracgleichung nach Drehimpulseigen-spinoren entwickeln können. Wir werden auf Besselsche Differentialgleichungen stoßen, deren Lösungen uns ein Erzeugendensystem des Lösungsraum der Diracgleichung liefern. Zum Abschluß analysieren wir einige Eigenschaften dieses Erzeugendensystems.

Da unserem System nach Herausnahme des willkürlich gewählten Ursprungs die Translationssymmetrie fehlt, ist der Impuls keine Erhaltungsgröße mehr. Nach Abschnitt 2.1.3 ist uns allerdings der Drehimpuls als Erhaltungsgröße bekannt. Wir entwickeln daher die Eigenfunktionen von D zum Eigenwert E nach Eigenfunktionen (2.9) von \mathcal{L} , setzen in die Diracgleichung ein und vergleichen Koeffizienten. Das so erhaltene System von zwei Differentialgleichungen pro Drehimpulseigenwert läßt sich entkoppeln. Wir erhalten folgende Differentialgleichungen (f, g siehe (2.9)):

$$\begin{aligned} r^2 f'' + r f' + ((Er)^2 - (m - 1/2)^2) f &= 0 \\ r^2 g'' + r g' + ((Er)^2 - (m + 1/2)^2) g &= 0. \end{aligned}$$

Sie lassen sich nach Reskalierung $\tilde{r} := Er$ durch Vergleich mit Gleichung 9.1.1 von [1] als Besselsche Differentialgleichungen identifizieren. Der Lösungsraum wird durch die Hankelfunktionen $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ ("Besselfunktionen dritter Art") aufgespannt. Durch Einsetzen in die Diracgleichung erkennen wir, daß

der Eigenraum zum Energieeigenwert E von D aufgespannt wird durch:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{E} \begin{pmatrix} H_{m-1/2}^{(1)}(Er)e^{i(m-1/2)\phi} \\ iH_{m+1/2}^{(1)}(Er)e^{i(m+1/2)\phi} \end{pmatrix}, \\ \sqrt{E} \begin{pmatrix} H_{m-1/2}^{(2)}(Er)e^{i(m-1/2)\phi} \\ iH_{m+1/2}^{(2)}(Er)e^{i(m+1/2)\phi} \end{pmatrix} \Big| m \text{ ist halbzahlig} \end{array} \right\}. \quad (2.10)$$

Abschließend möchten wir unser Verständnis des gefundenen Erzeugendensystems durch Studium einiger Eigenschaften der Hankelfunktionen verbessern. Diese Eigenschaften sind nachzulesen in [1], Kapitel 9.

Zunächst bemerken wir die Verwandtschaft zwischen Hankelfunktionen H_n , Neumannfunktionen Y_n und Besselfunktionen J_n :

$$H_n^{(1)} = J_n + iY_n, \quad H_n^{(2)} = J_n - iY_n \stackrel{n \in \mathbb{N}}{=} \overline{H_n^{(1)}}.$$

Die erste Hankelfunktion ist also für reelles Argument und ganzzahligen Index das komplex Konjugierte der zweiten Hankelfunktion.

Als nächstes erkennen wir eine Beziehung zwischen den Hankelfunktionen und ein- beziehungsweise auslaufenden Kreiswellen:

$$H_n^{(1)}(r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2/(\pi r)} e^{i(r - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)}. \quad (2.11)$$

Für große Abstände vom Ursprung entspricht die erste Hankelfunktion also einer auslaufenden Kreiswelle, deren Wellenzahl durch ihr Argument bestimmt werden kann. Aufgrund der zuvor diskutierten Eigenschaft entspricht die zweite Hankelfunktion für große Abstände vom Ursprung einer einlaufenden Kreiswelle.

Zuletzt betrachten wir das asymptotische Verhalten der Hankelfunktionen für kleine r :

$$\begin{aligned} iH_n^{(1)}(r) &\stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} -iH_n^{(2)}(r) \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\pi} \Gamma(n) \left(\frac{1}{2}r\right)^{-n}, \quad n \neq 0 \\ iH_0^{(1)}(r) &\stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} -iH_0^{(2)}(r) \stackrel{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln r. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Hankelfunktionen – und somit auch die Spinoren aus unserem Erzeugendensystem – divergieren für $r \rightarrow 0$. Wählen wir den Drehimpulseigenwert $m = 1/2$, so dominiert in der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichte für $r \rightarrow 0$ der r^{-1} -Term, was der klassisch in Abschnitt 2.1.2 gefundenen Situation entspricht. Wir folgern, daß der divergente Neumannanteil der Hankelfunktion für die Beschreibung von Punktkontakten wesentlich sein wird.

2.1.4 Aufteilung in ein- und auslaufende Wahrscheinlichkeit und Randbedingungen an der Punktierung

Am Ende dieses Abschnitts definieren wir, was wir unter einem Punktkontakt im Kontinuumsmodell verstehen. Die Definition benötigt eine Aufteilung einer gegebenen Lösung der Diracgleichung in zwei Anteile: einen, der Wahrscheinlichkeitsdichte zum Ursprung hin und einen, der Wahrscheinlichkeitsdichte vom Ursprung weg trägt. Dies geschieht in Analogie zu eindimensionalen Systemen.

In einer Dimension tragen die ebenen Wellen e^{ikx} beziehungsweise e^{-ikx} den nach rechts beziehungsweise links laufenden Wahrscheinlichkeitsstrom zu einer von k abhängigen Energie. In (2.11) hatten wir bereits eine Beziehung zwischen Kreiswellen und den Hankelspinoren aus (2.10) hergestellt. Diese Analogie gibt uns die benötigte Aufteilung vor.

Wir schreiben im folgenden S^o für den $H^{(1)}$ -Anteil eines Spinors aus der linearen Hülle von (2.10) und S^i für den $H^{(2)}$ -Anteil. i beziehungsweise o stehen für "in" beziehungsweise "out"². Die \mathbb{C} -Koeffizienten für die einzelnen Drehimpulse werden mit $\alpha_m^{i/o}$ bezeichnet.

Wir interessieren uns für den Wahrscheinlichkeitsstrom zum Ursprung hin, der von S^i getragen wird. Nach (2.6) ist für dessen Berechnung die Größe $\overline{(S^i)}_1 (S^i)_3$ wesentlich, wobei die Indizes hier die Spinorkomponenten bezeichnen.³ Für ihre Berechnung ist die Identität

$$Y_m J_{m+1} - Y_{m+1} J_m = \frac{2}{\pi \text{Id.}},$$

siehe [1], Gleichung 9.1.16, Id. steht für die identische Abbildung, wesentlich. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \overline{(S^i)}_1 (S^i)_3(r, \phi) = & \sum_m i E e^{i\phi} |\alpha_m^i|^2 [(J_m J_{m+1} + \\ & + Y_m Y_{m+1})(Er) + i(Y_m J_{m+1} - Y_{m+1} J_m)(Er)] + \text{Mischterme} \end{aligned}$$

und durch Einsetzen in (2.6)

$$I^i = 8 \sum_m |\alpha_m^i|^2. \quad (2.13)$$

²Wir betrachten hier den Bereich des Punktkontakts und die Umwelt (in der wir uns als Betrachter befinden) als "innen", und das streuende System als "außen".

³In Analogie zum Chalker-Coddington-Modell betrachten wir unseren Zweier-Spinor als erste und dritte Komponente eines Vierer-Spinors.

Die Mischterme verschwinden bei der Integration. Hieraus und aus der asymptotischen Entwicklung (2.11) schließen wir, daß S^i den am Punkt o aus dem System ausfließenden Strom trägt. Die gleiche Rechnung läßt sich auch für S^o durchführen.

Wir definieren jetzt für unser System den Begriff Punktkontakt. In Abbildung 2.3 wird eine Übersicht der Situation gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ und kleiner als jede andere relevante Länge⁴ und $M := E_2 \setminus B_\varepsilon(o)$. D (siehe (1.2)) lebe auf den stetigen, \mathbb{C}^2 -wertigen Funktionen auf M , ebenso \mathcal{L} (siehe (2.8)).

Fügt man D noch Unordnungselemente (Skalar- oder Eichpotentiale, Masse) hinzu, so müssen diese so langwellig sein, daß man das System bis zu einer von Drehimpuls und Energie abhängigen Distanz l vom Ursprung als geordnet betrachten kann. l ist gegeben als die Länge, ab der die Näherung (2.11) (Kreiswellen) für (2.10) gut wird.

Wir betrachten eine gleichzeitige Eigenfunktion Ψ zu D (Eigenwert E) und \mathcal{L} (Eigenwert m). Diese Eigenfunktion läßt sich im Bereich zwischen ε und l bis auf eine komplexe Konstante schreiben als

$$\alpha S^i + S^o, \quad (2.14)$$

wobei α eine komplexe Zahl ist.

Wir sagen, am Ursprung o des Systems ist ein m -Punktkontakt angebracht, wenn $\alpha \neq 1$ ist. Für einen stromlosen m -Punktkontakt ist $\alpha = e^{i\phi}$ mit $\phi \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Wir bemerken, daß wir durch die Randbedingungen

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{2e^{-i\phi}}{Er} \right)^{m-1/2} \frac{-i\pi}{\sqrt{E}\Gamma(m-1/2)} \Psi_1(r, \phi) = 1 - \alpha \quad (2.15)$$

für $m \neq 1/2$ sowie

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{i\pi}{2 \ln(Er)} \psi_1(r, \phi) = 1 - \alpha$$

für $m = 1/2$ den Koeffizienten α bereits bestimmen können (zumindest für $\varepsilon \rightarrow 0$). Bei Kenntnis von (2.15) läßt sich mit Hilfe von (2.13) der Wahrscheinlichkeitsstrom durch o aus dem System heraus sofort angeben.

⁴Andere relevante Längen sind die Wellenlänge des Teilchens $\frac{1}{E}$, die Größe des Systems L , die Wellenlänge der Unordnung λ . Für ein System mit zwei Kontakten kommt noch deren Abstand d hinzu.

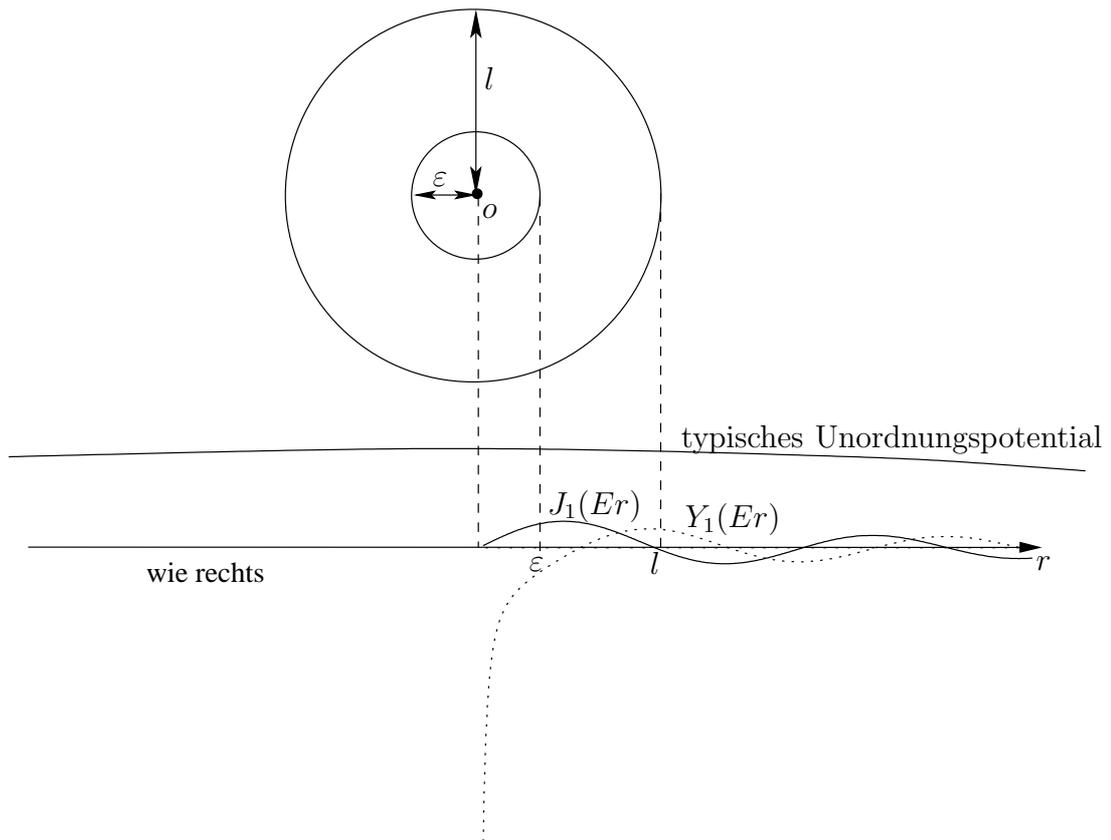


Abbildung 2.3: Die zur Definition eines Punktkontakts nötigen Längen. E gibt für $r \geq l$ die Wellenlänge der Besselfunktionen $J_1(Er)$ und Neumannfunktionen $Y_1(Er)$ (beide computergeneriert) an. ε beschreibt die Punktierung des betrachteten Teilgebiets der Ebene. Die Korrelationslänge der Unordnung ist größer als l .

2.1.5 Simulation eines kurzgeschlossenen Punktkontakts durch ein Störpotential

Wir schließen nun das System aus Abschnitt 2.1.4 durch Einbeziehung des bisher ausgenommenen ε -Balls. Dabei möchten wir durch lokale Änderung des Diracoperators einen (stromlosen) Punktkontakt simulieren, also eine Aufteilung (2.14) mit $\alpha \neq 1$ der Wellenfunktion im Abstand l vom Ursprung beibehalten. Wir führen ein lokales Störpotential am Ort des Punktkontakts ein. Die Auswirkung auf das Spektrum quantifizieren wir mit Hilfe von Störungstheorie erster Ordnung.

Im folgenden betrachten wir den (unordnungsfreien) Diracoperator

$$\tilde{D} := D + \mathbb{1}V(r). \quad (2.16)$$

Dabei sei $V(r) := vV^0(r)$ ein glattes Potential, daß außerhalb von $B_l(o)$ verschwindet. Die Wellenlänge des Potentials sei l . Störungstheorie erster Ordnung erlaubt uns, die Änderung des Energieeigenwerts zu \tilde{D} im gewählten Niveau näherungsweise zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \Delta E^{(1)} &= \langle \psi | V | \psi \rangle \\ &= 2\pi \int_0^l V(r) (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2) r dr. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Um zu erkennen, daß die Punktkontaktbedingung an (2.14) erfüllt ist, berechnen wir die Auswirkung des Störpotentials auf einen Spinor ψ mit Hilfe der WKB-Näherung⁵:

$$\psi_{WKB}(Er, \phi) = \psi_{\text{ungestört}} \left(\int_0^r (E - V(x)) dx, \phi \right).$$

Unter der Annahme, daß sich die Energie des Zustands beim Einschalten des Störpotentials nur wenig ändert ((2.17) also klein ist), verschwindet der Fehler

$$(\tilde{D} - E)S_{1/2}^{i/o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E}H_1^{2/1} \left(\int_0^r (E - V(x)) dx \right) \frac{-V(r)r + \int_0^r V(x)dx}{r \int_0^r (E - V(x))dx} \end{pmatrix}$$

für $r = l$, wo wir den Phasenunterschied zwischen ein- und auslaufender Welle bestimmen wollen. Da l so gewählt ist, daß die Näherung (2.11) gut ist, gilt für das ungestörte System näherungsweise $S_{1/2}^{i/o}(Er) \propto \frac{1}{\sqrt{r}} e^{\mp iEr}$. Die

Ersetzung $Er \rightarrow \int_0^r (E - V(x)) dx$ der WKB-Näherung liefert uns nun einen im Vergleich zum ungestörten System zusätzlichen Phasenfaktor

$$2 \int_0^l V(r) dr$$

zwischen ein- und auslaufendem Anteil. Wir folgern, daß die Anbringung des beschriebenen Störpotentials der Anbringung eines geeigneten kurzgeschlossenen $1/2$ -Punktkontakts entspricht. Ist die Energie des betrachteten Zustands festgelegt – zum Beispiel durch einen zweiten, nicht-kurzgeschlossenen Punktkontakt – so schränkt das die Wahl von $vV^0(r)$ ein, wenn es stationäre Zustände geben soll.

Wir betrachten nun das ungeordnete System. ψ ist ein Eigenspinor eines Diracoperators D^u mit Unordnung. Der Definitionsbereich von D^u sollen die auf $M \cup B_\varepsilon(o)$ einmal schwach ableitbaren Spinoren sein. $|\psi|$ ist über den Träger des Störpotentials näherungsweise konstant, da die Unordnung in diesem Bereich näherungsweise konstant ist. Dann ist

$$\Delta E^{(1)} = 2\pi v \rho(r=0) \underbrace{\int_0^l V^0(r) r dr}_{=: c/2\pi}. \quad (2.18)$$

$V(r)$ sei im folgenden immer so schwach, daß

$$\text{Unordnungspotential} + V(r)$$

ein Unordnungspotential ergibt, das im durchzuführenden Unordnungsmittel ein ähnliches statistisches Gewicht wie das ursprüngliche Unordnungspotential hat.

Mit den Betrachtungen dieses Abschnitts ist also ein Zusammenhang zwischen einem parametrisierten Störpotential und dem Energieeigenwert gewonnen. Dieser Zusammenhang wird im folgenden eine “Zustandsgeschwindigkeit” (im englischen “level velocity”) liefern.

2.2 Punktkontaktleitwerte und Dichtekorrelationen

Ziel dieses Kapitels ist, ein Analogon zum Hauptergebnis von [6] für das flache, zweidimensionale Diracsystem zu finden. Einleitend rekapitulieren wir

⁵Näherung von Wentzel, Kramers und Brillouin. Die Version für Schrödinger-Operatoren wird zum Beispiel beschrieben in [10], Seite 104.

das Hauptergebnis und stellen den Zusammenhang zu unserer Situation her. Wir entwickeln ein kontinuierliches Modell, das dem in [6] verwendeten diskreten Modell entspricht. Wir formulieren nötige Voraussetzungen und leiten das gesuchte Analogon ab.

2.2.1 Einleitung

In [6] besprechen Rochus Klesse und Martin R. Zirnbauer das Chalker-Coddington-Netzwerk, das sie – wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben – öffnen. Sie beweisen folgende Formel:

$$2\pi\nu\langle\rho_m f(\rho_m/\rho_l)\rangle_e = \langle F(T_{lm})\rangle,$$

mit

$\langle \dots \rangle$: gegebenes Unordnungsmittel,

ν : Zustandsdichte bei $E = 0$,

ρ_i : Wahrscheinlichkeitsdichte auf Link i des Netzwerks,

$f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} f\left(\left|1 - e^{i\varphi}\sqrt{1-x}\right|^2/x\right),$$

$$\langle A \rangle_e = \frac{1}{\epsilon\nu} \int_0^\epsilon dE \sum_{j=1}^N \langle \delta(E - E_j) A(\psi_j) \rangle,$$

ψ_j : stationärer Zustand des geschlossenen Systems.

Voraussetzungen sind: (i) Die Phasen der Koeffizienten S_{ll} und S_{mm} der Streumatrix sind gleichverteilt und statistisch unabhängig voneinander. (ii) Beide sind statistisch unabhängig von T_{lm} .

Nun beschreiben wir unsere Situation präzise. Dazu definieren und benennen wir zuerst die grundlegenden mathematischen Objekte. Wir legen die zu betrachtende Energieskala fest. Punktkontakte werden definiert, und ein erster Zusammenhang zwischen offenem und geschlossenem System wird formuliert.

Gegeben sei eine kompakte Teilmenge \tilde{M} des E_2 . Auf den stetigen Funktionen $\tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit verschwindendem Wahrscheinlichkeitsstrom durch den Rand von \tilde{M} lebt ein Diracoperator $D = (p_x - A_x)\sigma_x + (p_y - A_y)\sigma_y + m\sigma_z + V\mathbb{1}$ (siehe [5]), die Fluktuationen von A , m und V sind statistisch unabhängig. Das Unordnungsmittel sei $\langle \dots \rangle$ oder $\int \mathcal{D}[A, m, V] \mathcal{F}[A, m, V] \dots$, wobei \mathcal{F}

aufgrund der statistischen Unabhängigkeit faktorisiert. Die Wellenlänge der Unordnung sei nach unten beschränkt.

Da \tilde{M} kompakt ist, hat D ein diskretes Spektrum, so daß das Mittel $\langle \dots \rangle_e$ auch für unsere Situation Sinn macht. Im weiteren schicken wir – Klesse und Zirnbauer folgend – ϵ und damit die Größe des betrachteten Energiefensters gegen Null. Wir haben so die zu betrachtende Resonanzenergie festgelegt.

Zwei stromlose $1/2$ -Punktkontakte 1 und 2 werden wie in Abschnitt 2.1.4 ausgezeichnet. Der Abstand zwischen Ihnen sei groß gegen ihre Ausdehnung l . Die Wellenfunktion des Systems läßt sich in einer l -Umgebung des jeweiligen Kontakts aufteilen in ein- und auslaufenden Anteil (siehe (2.10)):

$$\begin{aligned}\psi(r^{(1)}, \phi^{(1)}) &= S_{1/2}^o(r^{(1)}, \phi^{(1)}) + i_1 S_{1/2}^i(r^{(1)}, \phi^{(1)}) \\ \psi(r^{(2)}, \phi^{(2)}) &= o_2 S_{1/2}^o(r^{(2)}, \phi^{(2)}) + i_2 S_{1/2}^i(r^{(2)}, \phi^{(2)}).\end{aligned}$$

Die Indizes an $S^{i/o}$ erinnern uns an unsere Beschränkung auf Gesamtdrehimpuls $1/2$.

Wir können jetzt einen Zusammenhang zwischen der Streumatrix S und einem Eigenzustand des geschlossenen Systems in der Nähe der Kontakte herstellen. Wir können zur Berechnung eines Streuzustands ψ das geschlossene System zur Hilfe nehmen, wenn wir ein Energieniveau des geschlossenen Systems der Energie der eingestreuten Teilchen anpassen können. Wir sprechen dann von Resonanz. Streuzustand und Eigenspinor unterscheiden sich höchstens in einem ϵ -Ball um den Punktkontakt. Die Beschreibung des geschlossenen Systems liefert i_1 , i_2 und o_2 , was die Besetzung der ein- und auslaufenden Kanäle festlegt. Ist umgekehrt die Besetzung der Kanäle bekannt, so ist die Streumatrix definiert durch

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ o_2 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Nach Landauer und Büttiker ist $T_{12} = |S_{12}|^2$ der Punktkontaktleitwert, dem unser Hauptinteresse gilt. Wir haben damit die Vorarbeiten abgeschlossen und widmen uns nun der Übertragung der Argumentation aus [6].

2.2.2 Eine Formel für den Leitwert

In diesem Unterabschnitt wollen wir – mit Hilfe einiger Annahmen – die Formel

$$\frac{\left\langle f \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \rho_2 \right\rangle_e}{\langle \rho_2 \rangle_e} = \langle F(T_{12}) \rangle$$

als direkte Entsprechung des Hauptergebnisses von [6] herleiten. Wir formulieren zunächst hinreichende Voraussetzungen. Dann nutzen wir als ersten Schritt den im letzten Abschnitt hergeleiteten Zusammenhang zwischen S und ψ bei Resonanz. Zur Abstimmung des Spektrums des geschlossenen Systems auf Resonanz bauen wir ein Störpotential ein, dessen Auswirkungen wir zumindest in Grenzfällen quantitativ untersuchen. Wir können mit Hilfe des Störpotentials ein resonantes Unordnungsmittel definieren. Mit diesem dürfen wir nur bei Resonanz gültige Zusammenhänge mitteln. Wir verknüpfen dann das resonante mit dem nicht-resonanten Mittel durch eine nützliche Formel, die uns das Endergebnis liefert.

Voraussetzungen

Wir formulieren nun später benötigte Voraussetzungen an das Unordnungsmittel: Wir fordern, daß der Winkel φ_1 der Phase zwischen ein- und auslaufendem Anteil der Wellenfunktion am Kontakt 1 statistisch unabhängig vom Unordnungspotential in der l -Umgebung des Kontakts 2 sein soll. Diese Voraussetzung entspricht dem zweiten Teil der Forderung (i) von Seite 47. Außerdem fordern wir, daß T_{12} statistisch unabhängig von φ_1 und von der Anbringung eines Buckelpotentials nach Abschnitt 2.1.5 sein soll.

Zusammenhang zwischen Streumatrix und Wellenfunktion bei Resonanz

Wir möchten einen Zusammenhang zwischen T_{12} aus dem offenen System und den die Wellenfunktion des resonanten, geschlossenen Systems beschreibenden Zahlen i_1, i_2 und o_2 herstellen. Dazu definieren wir eine der Streumatrix verwandte Matrix. Bestimmte Hankelspinorkoeffizienten bilden einen Eigenvektor dieser Matrix zum Eigenwert 1. Es folgt eine Gleichung, die T_{12} , o_2 und eine Phase verknüpft.

Wir gehen von der Streumatrix (2.19) und dem Leitwert $T_{12} = |S_{12}|^2$ aus. T_{12} ist unabhängig von der Phase von S_{12} . Da wir stromlose Punktkontakte

betrachten, gilt $i_1 = e^{i\varphi_1}$ und $i_2 = e^{i\varphi_2} o_2$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$. Wir schreiben (2.19) folgendermaßen um:

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ o_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}}_{=: T^\dagger} \begin{pmatrix} 1 \\ o_2 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren $\tilde{S} := TS$. \tilde{S} ist unitär, da T und S unitär sind. Außerdem gilt $T_{12} = |\tilde{S}_{12}|^2$, so daß \tilde{S} für unsere Zwecke die Streumatrix ersetzen kann. $\begin{pmatrix} 1 \\ o_2 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von \tilde{S} zum Eigenwert 1. Wir folgen wieder Klesse und Zirnbauer und bemerken, daß

$$|o_2|^2 = \frac{|1 - \tilde{S}_{11}|^2}{T_{12}} \stackrel{S \text{ unitär}}{=} \frac{|1 - e^{i \arg S_{11}} e^{i\varphi_1} \sqrt{1 - T_{12}}|^2}{T_{12}} \quad (2.20)$$

ist. Dies gilt nur bei Resonanz. Damit ist die am Anfang des Abschnitts angekündigte Gleichung gefunden.

Spektralabstimmung durch Störpotential

Wir möchten einen Parameter in unser System einbauen, der es uns erlaubt, das Spektrum einer gegebenen Unordnungskonfiguration auf Resonanz einzustellen. Dazu fügen wir dem System ein Buckelpotential variabler Stärke am Ort 2 hinzu. Wir legen dann einen unordnungsunabhängigen Variationsbereich für die Stärke des Buckelpotentials fest, in dem mehrere Niveaus auf Resonanz gebracht werden. Wir erkennen eine Schwierigkeit, die wir im Abschnitt “Überlegung zur Auswirkung des Buckelpotentials” behandeln.

Aus Abschnitt 2.1.5 ist bekannt, daß ein buckelförmiges Potential an einem Ort eine Abstimmung des Spektrums des geschlossenen Systems erlaubt. In erster Ordnung Störungstheorie war diese Abstimmung durch (2.17) quantifiziert worden. Wir betrachten Buckelpotentiale der Form $vV^0(r)$ bei 2, und zwar für v wie im nächsten Absatz beschrieben.

Wir legen ein maximales $v =: w$ fest, wählen im folgenden also $v \in [0, w]$. Betrachtet werden alle möglichen Unordnungskonfigurationen $\{(A, m, V)\}$. w soll so groß sein, daß für beliebiges (A, m, V) gilt: $E_i(A, m, V + v_i V^0) = 0$, und zwar für viele $v_i \in [0, w]$ (siehe Abbildung 2.4). In Worten: Durch Aufdrehen des Störpotentials stimmen wir viele Energieniveaus auf Resonanz ab.

Die Anzahl der v_i bezeichnen wir mit $N_w[A, m, V]$, wobei wir die Abhängigkeit von A , m und V in unserer Schreibweise nicht immer deutlich machen. Gleichzeitig soll w so klein sein, daß der Leitwert im Mittel von dem Störpotential unbeeinflusst ist. Unser Ergebnis darf nicht vom willkürlich gewählten w abhängen. Überlegen wir uns zunächst, wie N_w von der Unordnung abhängt.

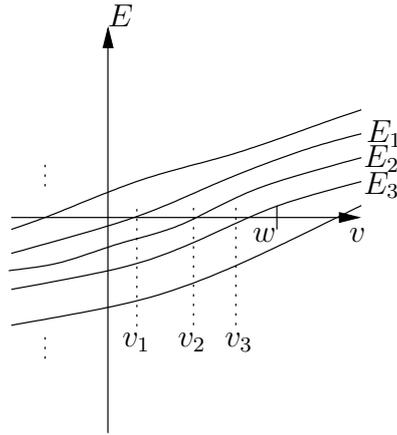


Abbildung 2.4: Spektralverschiebung durch Buckelpotential vV^0 für eine vorgegebene Unordnungsconfiguration (schematisch). Siehe auch Abbildung 2.5. Hier ist der Übersichtlichkeit halber N_w untypisch klein: $N_w = 3$.

Überlegung zur Auswirkung des Buckelpotentials

Ein wesentlicher Punkt in [6] war Fußnote 9. Im Chalker-Coddington-Netzwerk konnte gezeigt werden, daß durch Variation der Phase auf einem Link von 0 bis 2π genau ein Energieniveau auf Resonanz eingestellt wird. Für die Argumentation war die Periodizität des Spektrums des Chalker-Coddington-Modells sowohl bezüglich der Energie als auch bezüglich der variierten Phase wesentlich. In unserem Fall ist keine der beiden Periodizitäten gegeben, so daß wir die Argumentation nicht einfach kopieren können. Der Unterschied zwischen unserer Herangehensweise und der aus [6] wird durch N_w charakterisiert.

Wir wollen jetzt argumentieren, daß N_w für ausreichend große w groß ist, und sich dann nur noch wenig mit der Unordnung ändert. Wir liefern Argumente für zwei grenzwertige Regimes: Im ersten sind alle Wellenfunktionen lokalisiert, haben also größtenteils einen exponentiell kleinen Überlapp mit

dem Punktkontaktbereich. Im zweiten sind alle Wellenfunktionen delokalisiert, haben also alle einen vergleichbar großen Überlapp mit dem Punktkontaktbereich. Es wird sich herausstellen, daß N_w für ausreichend große w in beiden Fällen gleich ist. Wir nehmen dann im folgenden an, daß N_w vom Unordnungsmittel unabhängig ist.

Systemaufteilung. Wir teilen immer einen kreisförmigen Bereich um den Punktkontakt 2 durch einen unendlich hohen Massenwall $mM(r)\sigma_z$, $m^{-1} \rightarrow 0$, vom Rest des Systems ab. Die Ausdehnung dieses Bereichs sei die Wellenlänge der Unordnung. Dieser Wall ist für Diracteilchen undurchdringlich. Wir betrachten nun das Spektrum des kreisförmigen Bereichs. Es ist offensichtlich diskret, unbeschränkt und unabhängig vom Regime. Die Zustandsdichte ist viel niedriger als im Restsystem, da der abgetrennte Bereich deutlich kleiner ist. Sie ist konstant über große Energiefenster, da es sich um ein geordnetes System handelt.

Wir fügen nun ein Buckelpotential im Inneren des Massenwalls hinzu. Das innere Spektrum E_i verändert sich stetig mit der Stärke v des Potentials. Das Spektrum des Systems außerhalb des Massenwalls ist vom Buckelpotential völlig unbeeinflusst. Zur Illustration dient der obere Teil von Abbildung 2.5. Der Übersichtlichkeit halber sind die in der Abbildung gewählten Dichten kleiner als die im tatsächlichen System. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $\frac{\partial E_i}{\partial v} > 0$ ist, solange E_i ein Niveau des inneren Teilsystems ist. Wir sehen, daß für das innere System N_w mit w linear wächst, solange Störungstheorie erster Ordnung anwendbar ist.

Grenzfall vollständig lokalisiertes Regime. Jetzt beschränken wir uns auf den ersten Fall: Alle Wellenfunktionen sind lokalisiert. Wir betrachten einen Ausschnitt aus dem Spektrum um die Resonanzenergie.

Zuerst geben wir ein Skalenargument. Wir gehen davon aus, daß die Zustandsdichte $\tilde{\nu}$ pro Fläche pro Energie im Innensystem gleich der im Gesamtsystem ist. Ist ξ die Lokalisierungslänge, so finden sich im Gesamtsystem $\tilde{\nu}\xi^2$ durch ein Buckelpotential auf Resonanz einstellbare Zustände. Da das Innensystem ungefähr so groß ist wie die Lokalisierungslänge, findet sich im Innensystem die gleiche Zahl so einstellbarer Zustände.

Wir geben nun noch ein detaillierteres Argument. Wir vereinigen die beiden Teilsysteme, indem wir den Massenwall adiabatisch auf 0 reduzieren. Dabei vereinigen sich die Spektren der beiden Systeme zu einem Spektrum. Dort, wo sich vor der Reduzierung des Massenwalls die Spektren der Teilsysteme

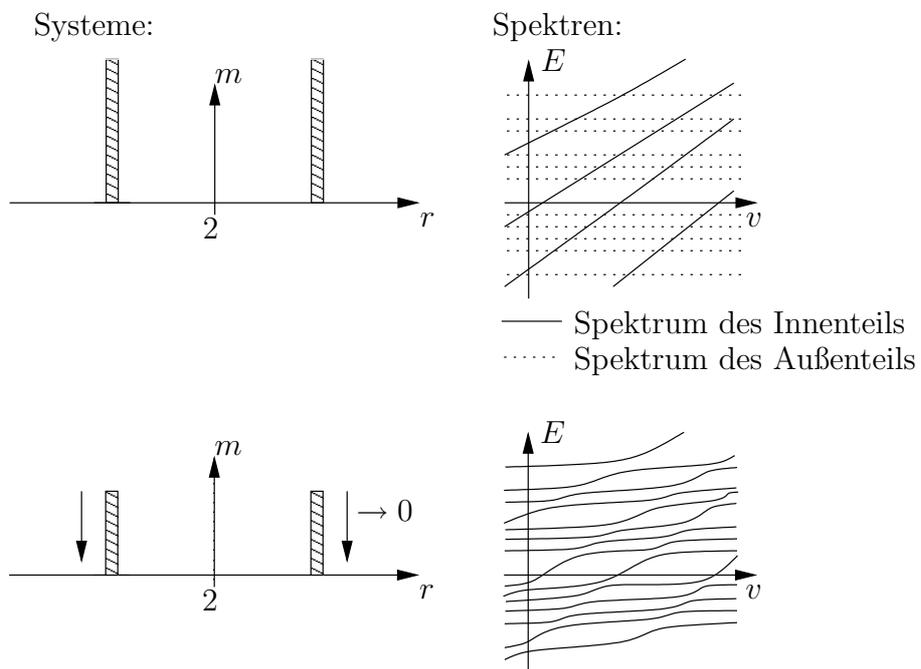


Abbildung 2.5: Spektren von Teilsystemen. Hier: Grenzwert mit starker Lokalisierung (die Niveaus sind nur abschnittsweise v -abhängig).

kreuzten, kommt es zu vermiedenen Niveaufkreuzungen. Das Ergebnis dieses Vorgangs wird im unteren Teil von Abbildung 2.5 veranschaulicht.

Die relative Änderung von N_w bei Reduzierung des Massenwalls verschwindet nun, denn:

1. Ist die Anzahl der Level in einem gegebenen Energiefenster groß, so ist die Änderung dieser Anzahl bei Entfernung des Massenwalls und konstantem Buckelpotential dagegen vernachlässigbar gering.
2. Überstreicht vor der Reduzierung des Massenwalls ein Niveau des inneren Systems unter Variation von v eine bestimmte Energie, so ist diesem Innenniveau ein Niveau des Gesamtsystems zugeordnet, das dieselbe Energie überstreicht. Diese Zuordnung ist injektiv. Beschränken wir v auf $[0, w]$, so verlieren wir höchstens zwei Niveaus.

Zu 1. Wir vergleichen die Zustandsdichte des äußeren Systems mit der des Gesamtsystems. Beide sind proportional der Systemausdehnung zum Quadrat. Im Grenzfall

$$\frac{\text{Systemgröße}}{\text{Größe des abgetrennten Bereichs}} \rightarrow \infty$$

geht

$$\frac{\text{Gesamtsystemausdehnung}}{\text{Ausdehnung des äußeren Systems}} \rightarrow 1.$$

In diesem Grenzfall ist also die Zustandsdichte im inneren System vernachlässigbar gegen die Zustandsdichten für das äußere und das Gesamtsystem, und diese sind gleich. Das ist äquivalent zu 1.

Zu 2. Für die folgende Argumentation siehe Abbildung 2.6. Im aufgeteilten System gibt es Schnittpunkte (v_i, E_i) innerer Niveaus mit äußeren Niveaus (siehe Abbildung 2.5). Im vereinigten System dominiert abseits solcher Schnittpunkte entweder das Verhalten des inneren Niveaus oder das Verhalten des äußeren Niveaus das Verhalten des Gesamtsystemniveaus. In einem Bereich gibt es also für gegebene Achse $E = \text{const.}$ und gegebenen Schnittpunkt der Achse mit einem inneren Niveau genau einen Schnittpunkt der Energieachse mit einem Niveau des Gesamtsystems, im anderen keinen.

In der Nähe eines (v_i, E_i) kommt es nun zu vermiedenen Niveaufkreuzungen. Wir legen unsere Achse $E = \text{const.}$ in diesen Bereich. (v_i, E_i) wird in

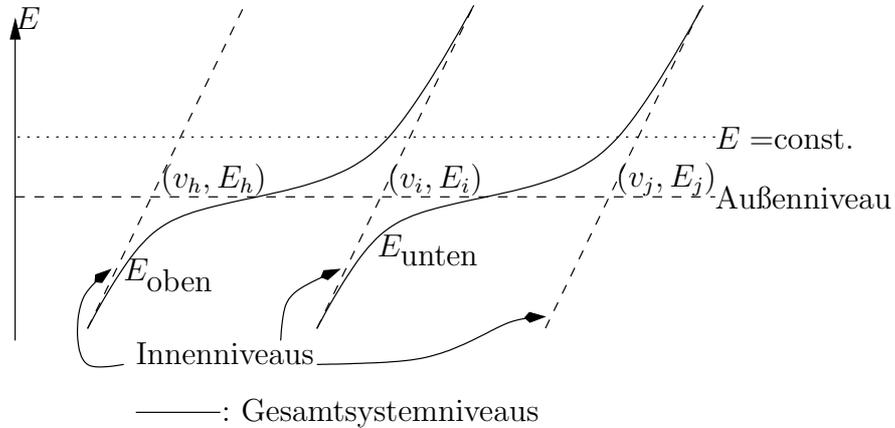


Abbildung 2.6: Zur Injektivität der Zuordnung Resonanz innerer Ausschnitt \rightarrow Resonanz Gesamtsystem.

der Zeichnung umrahmt von zwei Gesamtsystem-Energieniveaus E_{unten} und E_{oben} . Gibt es $0 < v_h < v_i < v_j < w$, so daß (v_h, E_i) und (v_j, E_i) Schnittpunkte anderer äußerer Niveaus mit dem betrachteten inneren Niveau sind, so schneiden sicher $E_{\text{unten}}(v)$ und $E_{\text{oben}}(v)$ die ausgezeichnete Energieachse für $v \in]v_h, v_j[$. Solche v_h, v_j gibt es nur für die Schnittpunkte nicht, die den Rändern von $[0, w]$ am nächsten liegen. Nur an diesen Stellen kann eine Resonanz des inneren Systems nicht injektiv einer Resonanz des Gesamtsystems zugeordnet werden. Damit folgt 2.

Insgesamt geht die relative Änderung von N_w beim Zusammenschluß der Systeme im lokalisierten Regime also gegen Null, wenn die Größe des Restsystems groß gegen die Größe des inneren Bereichs wird.

Grenzfall völlig delokalisiertes Regime (ohne Unordnung). Wir untersuchen nun das vollständig delokalisierte Regime ohne Massenwall. Durch Anbringung eines Buckelpotentials werden alle Energieniveaus beeinflusst. In erster Ordnung Störungsrechnung ist $N_w = w \left| \frac{\partial E}{\partial v} \right|_{\text{mittel}} \nu$. Der Index “mittel” steht für Mittelung über das betrachtete Energiefenster. $\left| \frac{\partial E}{\partial v} \right|_{\text{mittel}}$ ist proportional zur Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Punkt 2, welche proportional zur inversen quadratischen Systemgröße L^{-2} ist. Die Zustandsdichte ν ist proportional zur Systemgröße zum Quadrat. N_w ist damit unabhängig von der Systemgröße.

Schalten wir nun den Massenwall ein, so entspricht das entstehende innere System dem Gesamtsystem mit geringerer Ausdehnung. Da N_w nicht von der

Systemgröße abhängt, ist N_w für das Gesamtsystem gleich N_w für das innere System. Damit ist N_w für das Gesamtsystem im delokalisierten Regime gleich N_w für das lokalisierte Regime, denn die inneren Systeme der beiden Regimes unterscheiden sich nicht.

Das resonante Mittel

Wir definieren nun das resonante Mittel $\langle \dots \rangle_{\text{res}}$:

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_{\text{res}} &:= \int \mathcal{D}[A, m, V] \mathcal{F}[A, m, V] \cdot \\ &\cdot \frac{1}{N_w[A, m, V]} \sum_{i=1}^{N_w[A, m, V]} O[A, m, V + v_i[A, m, V]V^0]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$N_w[A, m, V]$ ist die Anzahl der Energieniveaus, die unter Variation der Stärke des Buckelpotentials von 0 bis w die Achse $E = 0$ schneiden. $v_i[A, m, V]$ ist dementsprechend die Nullstelle des i -ten Niveaus (siehe Abbildung 2.4).

Resonante Mittelung

Anwendung der Funktion f von Seite 47 auf (2.20), resonante Mittelung und Integration über $[0, 2\pi]$ mit Maß $\frac{d\varphi_1}{2\pi}$ ergeben:

$$\langle f(|o_2|^2) \rangle_{\text{res}} = \langle F(T_{12}) \rangle_{\text{res}},$$

F siehe Seite 47. Es ist

$$\langle f(|o_2|^2) \rangle_{\text{res}} = \langle F(T_{12}) \rangle, \quad (2.22)$$

da T_{12} nach Voraussetzung unabhängig von dem zusätzlichen Buckelpotential ist.

Umwandlung des Eigenfunktionsmittels in das resonante Mittel

Wir möchten nun einen Zusammenhang zwischen dem resonanten und dem nicht-resonanten Mittel aufdecken, der uns zusammen mit dem Ergebnis des Abschnitts “Überlegung zur Auswirkung des Buckelpotentials” unser Ergebnis liefert. Wir folgen einer Betrachtung aus [6]. Dabei rechnen wir zunächst ein günstig geschriebenes nicht-resonantes Mittel in das resonante Mittel um.

Dann argumentieren wir, daß das gut passende Mittel dem Eigenfunktionsmittel von Seite 47 entspricht. Zuletzt führen wir die Aussagen über den Zusammenhang zwischen offenem und geschlossenem System bei Resonanz zusammen mit den Aussagen über die Mittel und erhalten das am Anfang von Abschnitt 2.2.2 angekündigte Ergebnis.

Wir rechnen nun das abgewandelte Eigenfunktionsmittel $\langle \dots \rangle_{\tilde{\epsilon}}$,

$$\langle A \rangle_{\tilde{\epsilon}} := \frac{1}{\epsilon \nu} \int_0^\epsilon dE \int_0^w \frac{dv}{w} \langle \delta (E_{1(v)}(v) - E) A (\psi_{1(v)}(v)) \rangle,$$

in das resonante Mittel um. $E_{1(v)}$ bezeichnet dabei das Energieniveau, das bei Steigerung von v als nächstes resonant wird.

Wir vertauschen die Reihenfolge von Unordnungsmittel und v - sowie E -Integration auf der rechten Seite. Das ist erlaubt, da das statistische Gewicht \mathcal{F} einer Unordnungskonfiguration sich bei Hinzufügung eines Buckelpotentials nur vernachlässigbar ändern soll. Die E -Integration führen wir aus. Die δ -Distribution liefert uns 1 genau dann, wenn $E_{1(v)}(v)$ in dem Intervall $[0, \epsilon]$ liegt, sonst Null. Um die Situation besser zu verstehen, betrachten wir Abbildung 2.7.

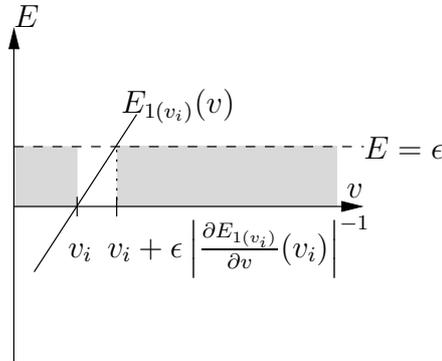


Abbildung 2.7: Bestimmung des v -Intervalls, in dem $E_i(v)$ Werte im Intervall $[0, \epsilon]$ annimmt. Da ϵ gegen Null gehen soll, darf $E_i(v)$ in diesem Intervall linear genähert werden.

Die v -Integration über $[0, w]$ spaltet sich also auf in eine Summe über Integrale über Intervalle $\left[v_i, v_i + \epsilon \left| \frac{\partial E_{1(v_i)}}{\partial v}(v_i) \right|^{-1} \right]$:

$$\langle A \rangle_{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon \nu w} \left\langle \sum_{i=1}^{N_w} \int_{v_i}^{v_i + \epsilon \left| \frac{\partial E_{1(v_i)}}{\partial v}(v_i) \right|^{-1}} dv A (\psi_{1(v)}(v)) \right\rangle$$

Die Integrationsgebiete können durch entsprechende Wahl von ϵ beliebig klein gemacht werden. Daher wird der Integrand als konstant angenommen und durch seinen Wert am linken Intervallrand ersetzt. Außerdem schreiben wir das Unordnungsmittel als Funktionalintegral:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\bar{\epsilon}} &= \frac{1}{\nu w} \int \mathcal{D}[A, m, V] \mathcal{F}[A, m, V] \sum_{i=1}^{N_w} A(\psi_{1(v_i)}(v_i)) \left| \frac{\partial E_1(v_i)}{\partial v}(v_i) \right|^{-1} \\ &\stackrel{(2.21)}{=} \frac{1}{\nu w} \left\langle N_w A \left| \frac{\partial E_1}{\partial v} \right|_{v=0}^{-1} \right\rangle_{\text{res}}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\left| \frac{\partial E_1}{\partial v} \right|_{v=0}(\psi) = \left| \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\phi |\psi(r, \phi)|^2 V^0(r) \right|$$

nach Störungsrechnung erster Ordnung. Damit ist das modifizierte Eigenfunktionsmittel in das resonante Mittel umgerechnet.

Wir setzen – erneut Klesse und Zirnbauer folgend –

$$A(\psi) := f(|o_2|^2) \left| \frac{\partial E_1}{\partial v} \right|_{v=0} \frac{1}{N_w}$$

(Achtung – N_w ist nicht durch ψ festgelegt, sondern durch (A, m, V) gegeben. Alle relevanten Mittel können aber die Eingabe von unordnungsabhängigen Operatoren verkräften.) und folgern mit Hilfe von (2.22):

$$\left\langle f(|o_2|^2) \left| \frac{\partial E_1}{\partial v} \right| \frac{1}{N_w} \right\rangle_{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{\nu w} \langle F(T_{12}) \rangle. \quad (2.23)$$

Wir wollen nun argumentieren, daß in guter Näherung das Mittel $\langle \dots \rangle_{\bar{\epsilon}}$ dem Mittel $\langle \dots \rangle_e$ entspricht. Zuerst formulieren wir den formellen Unterschied: Das Schlange-Mittel addiert dem Argument der zu mittelnden Größe noch ein Buckelpotential vV^0 bei 2 hinzu, über dessen Stärke später gemittelt wird. Außerdem ist es sensitiv für alle während des v -Mittels resonant werdenden Energieniveaus, nicht nur für das erste.

Durch die Wahl der Ausdehnung des Buckels, seiner Form und der maximalen Stärke w wird aber sichergestellt: Die v -Mittlung ist kompatibel mit den ohnehin vorhandenen Schwankungen des Unordnungspotentials. Präziser gesprochen: Das Potential $V + vV^0$ kommt in der Gesamtheit der Unordnungskonfigurationen genauso vor wie V ; es wird also nur eine bereits durchgeführte Mittlung erneut angewandt.

Wir ersetzen im folgenden also $\langle \dots \rangle_{\tilde{e}}$ auf der linken Seite von (2.23) durch $\langle \dots \rangle_e$. Aus “Überlegung zur Auswirkung des Buckelpotentials” wissen wir, daß N_w sich nur wenig mit der Unordnung ändert. Wir können daher (2.23) umschreiben in

$$\left\langle f(|o_2|^2) \left| \frac{\partial E_1}{\partial v} \right| \right\rangle_{\tilde{e}} = \frac{N_w}{\nu w} \langle F(T_{12}) \rangle. \quad (2.24)$$

Da erste Ordnung Störungstheorie anwendbar ist, gilt auch näherungsweise

$$N_w \approx w\nu \left\langle \left| \frac{\partial E_1}{\partial v} \right|_{v=0} \right\rangle_{\tilde{e}} \stackrel{(2.18)}{\approx} w\nu c \langle \rho_2 \rangle_e.$$

Das rechts und (2.18) links in (2.24) einsetzen:

$$\frac{\left\langle f \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \rho_2 \right\rangle_e}{\langle \rho_2 \rangle_e} = \langle F(T_{12}) \rangle.$$

Das ist unser Ergebnis.

Zusammenfassung und Ausblick

Der Schwerpunkt des ersten Teils der Arbeit lag auf der Untersuchung von Randbedingungen für Diracoperatoren aus mathematischem und festkörperphysikalischem Blickwinkel. Die festkörperphysikalische Betrachtung war motiviert durch den Kontinuumslikes des Chalker-Coddington-Modells in der Ebene. Für sternförmige, beschränkte Teilgebiete und die Halbebene konnten wir Randbedingungen angeben, für die der sich ergebende Diracoperator hermitesch wurde. Wir scheiterten bei dem Versuch, den Kontinuumslikes des diskreten Chalker-Coddington-Modells auf der Sphäre durchzuführen. Wir übertrugen daher den Kontinuumslikes aus der Ebene mit differentialgeometrischen Methoden auf die Sphäre. Auch hier fanden wir geeignete Randbedingungen.

In der Mathematik existiert eine gut ausgearbeitete Theorie der Randbedingungen und Indizes von Diracoperatoren. Um diese auf physikalische Fragestellungen anwendbar zu machen, haben wir für Kreisscheibe und Halbebene versucht, die physikalischen Beispiele in die Ansätze der Theorie in der Version von Paul Kirk und Matthias Lesch einzubetten. Der Diracoperator auf der Halbebene mit Randbedingungen aus dem Chalker-Coddington-Modell erfüllte viele Voraussetzungen. Daher wurde versucht, für dieses Bei-

spiel den in der mathematischen Theorie eine wichtige Rolle spielenden Calderón-Projektor zu berechnen, was aber nicht gelang. An dieser Stelle müßte erneut angesetzt werden, um die Indizes und Invarianten der mathematischen Theorie zu berechnen und dann mit physikalischen Größen zu vergleichen.

Im zweiten Teil der Arbeit untersuchten wir Punktkontakte. Für das diskrete Chalker-Coddington-Modell hatten Rochus Klesse und Martin R. Zirnbauer eine Formel gefunden, die einen Zusammenhang zwischen dem Leitwert eines Netzwerks mit zwei Punktkontakten und bestimmten Korrelationen der Wahrscheinlichkeitsdichten im gleichen Netzwerk ohne Kontakte herstellt. Um einen ähnlichen Zusammenhang im kontinuierlichen Modell zu finden, haben wir zunächst für dieses den Begriff Punktkontakt definiert. Um die von Klesse und Zirnbauer durchgeführte Rechnung mit Hilfe der gegebenen Definition zu reproduzieren, stellten wir mit Hilfe eines variablen, lokalen Potentials das Spektrum des geschlossenen Systems auf Resonanz ein. Offen bleibt die Frage, wie stark die Anzahl der bei einer bestimmten Variation des Potentials auf Resonanz abgestimmten Energieniveaus von der Unordnungsrealisierung abhängt. Wir haben nach einer detaillierten Diskussion zweier Spezialfälle angenommen, daß diese Abhängigkeit schwach ist. Wir konnten dann unter ähnlichen Voraussetzungen eine zu der von Klesse und Zirnbauer analoge Formel herleiten.

Anhang A

Stückwerk zur Mathematik

A.1 Clifford-Algebra

Gegeben sei ein reeller Vektorraum V der Dimension n mit reellem Skalarprodukt (\bullet, \bullet) . Wir denken uns auf diesem Vektorraum ein Produkt $\cdot : V \times V \rightarrow$ (Raum der Bivektoren) gegeben, das die folgende Regel erfüllt:

$$v \cdot w + w \cdot v = -2(v, w). \quad (\text{A.1})$$

Den Raum der Bivektoren kann man sich zum Beispiel vorstellen als den Raum der von zwei Vektoren aufgespannten orientierten Flächen. Aus (A.1) ist ersichtlich: Der Raum der Bivektoren ist $\frac{1}{2}n(n-1)$ -dimensional.

Wir erweitern jetzt den Punkt assoziativ und distributiv auf Produkte von Vektoren mit Bivektoren und erhalten Trivektoren, dann auf Produkte von Vektoren mit Trivektoren und so weiter. Aus (A.1) ist wieder ersichtlich: Alle m -Vektoren mit $m > n$ sind Null. Wir kombinieren: Die Dimension des Raums der k -Vektoren ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Wir definieren jetzt die Cliffordalgebra

$$C(V) := \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{k=1}^n \text{Raum der } k\text{-Vektoren}.$$

Die Cliffordalgebra hat die Dimension 2^n .

A.2 Levi-Civita-Zusammenhang

Gegeben sei ein \mathbb{K} -Vektorbündel V über einer glatten Mannigfaltigkeit M . Ein Zusammenhang auf dem Vektorbündel ist eine \mathbb{K} -bilineare Abbildung $\nabla : TM \times V \rightarrow V$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\nabla(\alpha v) &= \alpha \nabla(v) + v d\alpha, \\ \nabla_{\alpha t + \beta u} &= \alpha \nabla_t + \beta \nabla_u.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sollen für jede glatte Funktion $\alpha : M \rightarrow \mathbb{K}$ beziehungsweise $\beta : M \rightarrow \mathbb{K}$ und alle glatten Schnitte t, v des Tangentialbündels TM sowie alle glatten Schnitte v des Vektorbündels V gelten.

Ein Levi-Civita-Zusammenhang einer glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit ist nun ein Zusammenhang $\nabla : TM \times TM \rightarrow TM$ mit den zusätzlichen Eigenschaften Torsionsfreiheit

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

und Metrikkompatibilität

$$d(X, Y) = (\nabla X, Y) + (X, \nabla Y)$$

(jeweils für alle glatten Schnitte X, Y des Tangentialbündels). Der Fundamentalsatz der Riemannschen Geometrie besagt, daß es für eine gegebene Riemannsche Mannigfaltigkeit genau einen Levi-Civita-Zusammenhang gibt.

Dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇ auf dem Tangentialbündel ist durch die Forderung

$$d(\alpha(X)) = (\nabla \alpha)(X) + \alpha(\nabla X)$$

für alle 1-Formen α und Vektorfelder X genau ein Zusammenhang ∇ auf dem Kotangentialbündel zugeordnet. Auch ∇ wird Levi-Civita-Zusammenhang genannt.

Besitzt M eine Spinstruktur, so gibt es ein Spinorbündel $\mathcal{S} \rightarrow M$, ein Cliffordbündel $CM \rightarrow M$ und eine kanonische Wirkung des Cliffordbündels auf dem Spinorbündel, die Cliffordmultiplikation $c : CM \rightarrow \text{End}(\mathcal{S})$. Zum Levi-Civita-Zusammenhang ∇ auf dem Tangentialbündel definieren wir für einen Orthonormalrahmen $\{e_j\}$ Koeffizienten ω_{ij}^k durch

$$\nabla_{\partial_i} e_j = \omega_{ij}^k e_k. \tag{A.2}$$

Wir definieren den Levi-Civita-Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{S}}$ auf dem Spinorbündel durch die Relation

$$\nabla_{\partial_i}^{\mathcal{S}} = \partial_i + \frac{1}{4} \sum_{jk} \omega_{ij}^k c(e^j) c(e^k). \quad (\text{A.3})$$

Die e^i sind dabei als Elemente des Cliffordbündels aufzufassen. Für einen beliebigen glatten Schnitt a des Cliffordbündels und einen beliebigen glatten Schnitt X des Tangentialbündels gilt

$$[\nabla_X^{\mathcal{S}}, c(a)] = c(\nabla_X a),$$

der Levi-Civita-Zusammenhang auf \mathcal{S} ist also ein Cliffordzusammenhang.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions*. Dover Books in Mathematics, 1970.
- [2] Vidal Alonso, Salvatore De Vincenzo, and Luigi Mondino. On the boundary conditions for the dirac equation. *Eur. J. Phys*, 18:315–320, 1997.
- [3] A. Altland, B. D. Simons, and M. R. Zirnbauer. Theories of low-energy quasi-particle states in disordered d-wave superconductors. *Physics Reports*, 359(4):283, March 2002.
- [4] Nicole Berline, Ezra Getzler, and Michèle Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators*. Number 298 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag, 1992.
- [5] C.-M. Ho and J.T. Chalker. Models for the integer quantum Hall effect: the network model, the Dirac equation, and a tight-binding Hamiltonian. *cond-mat/9605073*, May 1996.
- [6] Rochus Klesse and Martin R. Zirnbauer. Point-contact conductances from density correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2094–2097, 2001.
- [7] Andreas W. W. Ludwig, Matthew P. A. Fisher, R. Shankar, and G. Grinstein. Integer quantum hall transition: An alternative approach and exact results. *Phys. Rev. B*, 50(11):7526, September 1994.
- [8] Martin Janssen, Marcus Metzler and Martin R. Zirnbauer. Point-Contact Conductances at the Quantum Hall Transition. *Phys. Rev. B*, 59, 1999.
- [9] Paul Kirk and Matthias Lesch. *The eta-invariant, Maslov index, and spectral flow for Dirac-type operators on manifolds with boundary*, chapter 2. arXiv:math.DG/0012123, December 2000.

- [10] J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics, Revised Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Danksagung

Besonderer Dank gebührt meinen Betreuern Herrn Priv.-Doz. Dr. Rochus Klesse, Herrn Dr. Florian Merz und Herrn Professor Ph. D. Martin R. Zirnbauer.

Dank gebührt außerdem meinen Verwandten, Verschwägerten und Freunden, die mich vor und während der Arbeit unterstützt und begleitet haben.

Ich versichere, daß ich zum Verfassen des Inhalts der Arbeit in direkter Weise keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt und Zitate kenntlich gemacht habe.

(Roland Gersch)