

# Optisches Pumpen am Rubidium

Roland Gersch, Fatma Kul, Tanja Striepling, Christian Stromenger  
Betreuer: Dr. Guido Sonnabend

30.07.02

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbereitung</b>	<b>3</b>
1.1	Aufspaltung der einzelnen Energieniveaus . . . . .	3
1.1.1	Feinstruktur . . . . .	3
1.1.2	Hyperfeinstruktur . . . . .	5
1.1.3	Niveauaufspaltung im Magnetfeld: der normale Zeemann-Effekt	6
1.2	Elektronenstruktur und Termschema von Rubidium . . . . .	6
1.3	Optisches Pumpen . . . . .	9
1.4	Breit-Rabi-Formel . . . . .	9
1.5	Linienbreiten . . . . .	10
1.6	Verbreiterungsmechanismen . . . . .	10
1.6.1	Natürliche Linienbreite . . . . .	10
1.6.2	Doppler-Verbreiterung . . . . .	13
1.6.3	Stoßverbreiterung von Spektrallinien . . . . .	14
1.7	Versuchsaufbau . . . . .	16
1.8	Zeeman-Effekt . . . . .	21
1.9	Mehrquantenübergänge . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Auswertung</b>	<b>22</b>
2.1	Magnetfeld . . . . .	22
2.2	Graphische Darstellung der Spektren . . . . .	23
2.3	Position der Maxima . . . . .	23
2.4	Näherung der Breit-Rabi-Formel . . . . .	23
2.5	Bestimmung des Erdmagnetfeldes . . . . .	28
2.6	Diskussion . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Ergänzung</b>	<b>31</b>
3.1	Diskussion Erdmagnetfeld . . . . .	31
3.2	Bestimmung der Maxima-Positionen . . . . .	32

# 1 Vorbereitung

## 1.1 Aufspaltung der einzelnen Energieniveaus

Solange man bei der quantenmechanischen Behandlung des *Einelektronenatoms* die Wechselwirkung des Kerns mit dem Elektron nur durch das kugelsymmetrische Coulomb-Potential beschreibt, erhält man Energiewerte  $E_n$ , die nur von der Hauptquantenzahl  $n$  abhängen. Der Bahndrehimpuls  $l$  hat keinen Einfluss auf die Energie des Elektrons. Sowohl das Bohrsche Atommodell als auch die quantenmechanische Behandlung mit der Schrödinger-Gleichung liefert für die optischen Übergänge von *Einelektronenatomen* die Beziehung

$$E_{if} = R^* \left\langle \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right\rangle \quad (1)$$

mit  $R^* = R \frac{\mu}{m_e} = 1.09677585 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

Durch hochauflösende optische Spektroskopie wurde nun allerdings bereits früh festgestellt, dass die Spektrallinien des Wasserstoffs eine Unterstruktur besitzen. Diese Unterstruktur ist in dem einfachen, durch (1) beschriebenen Termschema nicht enthalten. Diese Differenz zwischen Experiment und Modellvorhersage resultiert daraus, dass man bei dieser Beschreibung nur die reinen Coulomb-Wechselwirkung betrachtet, und die wesentlich schwächeren Wechselwirkungen, wie die Spin-Bahn-Kopplung, die zur Feinstruktur führt, und die magnetische Kopplung zwischen Elektronen und Kern, die zur Hyperfeinstruktur führt, vernachlässigt.

### 1.1.1 Feinstruktur

Bei entsprechend hoher Auflösung von Spektren erkennt man, dass alle Energierterme mit Ausnahme der s-Zustände in zwei Unterzustände aufspalten. Die daraus resultierende *Dublett-* oder *Multiplett-*Struktur der Spektrallinien nennt man *Feinstruktur*. Sie lässt sich nicht mit der Coulomb-Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron erklären, sondern ist eine Folge der sogenannten *Spin-Bahn-Kopplung*. Die Elektronen haben sowohl auf Grund ihres Spins als auch wegen ihres Bahndrehimpuls ein magnetisches Moment. Je nachdem, ob diese beiden Momente nun parallel oder antiparallel zueinander stehen, haben sie eine etwas andere Energie, die dann zu Feinstrukturaufspaltung führt.

Die Behandlung der Spin-Bahn-Kopplung durch die nichtrelativistische Näherung der Dirac-Gleichung ist relativ aufwändig, da aber die zusätzlichen Energierterme klein gegenüber den klassischen Energieniveaus sind, kann man die Feinstrukturaufspaltung mit halbklassischen Methoden und stationärer Störungsrechnung berechnen.

Die Bewegung des Elektrons um den Kern ergibt im Ruhesystem des Elektrons eine Bewegung des Kerns um das Elektron (siehe Abbildung 1). Diese Kernbewegung entspricht einem Elementarstrom, dessen Magnetfeld ergibt sich mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart zu

$$B_l = \frac{Ze\mu_0}{4\pi r^3} (v \times (-r)) = -\frac{Ze\mu_0}{4\pi r^3} (v \times r) \quad (2)$$

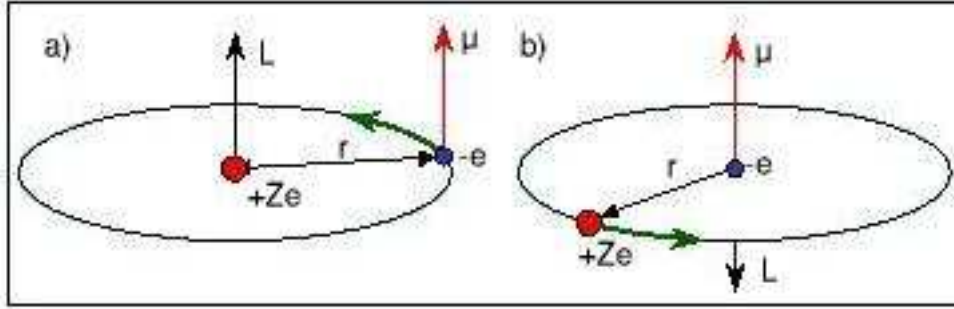


Abbildung 1: Halbklassisches Modell der Spin-Bahn-Kopplung: (a) Im Ruhesystem des Kerns kreist das Elektron um den Kern. (b) Im Ruhesystem des Elektrons kreist der Kern um das Elektron.

wobei  $-r$  den Vektor des umlaufenden Kerns im Bezugssystem des Elektrons bezeichnet,  $\mu_0$  ist die Induktionskonstante des Vakuums. Da  $L = mr \times v$ , folgt

$$B_l = \frac{Ze\mu_0}{4\pi r^3 m} L \quad (3)$$

Bei der Rücktransformation wird dieser Ausdruck mit dem sogenannten *Thomas-Faktor 1/2* multipliziert, der nur durch die exakte relativistische Rechnung begründet werden kann.

Im Magnetfeld  $B$  erfährt der Spin eine Zusatzenergie

$$E_{l,s} = -\mu_s B_l = \frac{Ze^2\mu_0}{8\pi m^2 r^3} (S \cdot L) \quad (4)$$

wobei  $\mu_s = g_s \mu_B \frac{S}{\hbar}$ ,  $\mu_B = \frac{e}{2m}$  und  $g \simeq 2$  verwendet wurde.

Setzt man einen Bahnradius von  $1 \text{ \AA}$  an, so erhält man für  $Z=1$  (Wasserstoffatom) Magnetfelder  $B_l \sim 1$  Tesla, was zu Aufspaltungen der Niveaus im Bereich von einigen 100 meV führt. Dies ist im Einklang mit den experimentellen Befunden.

Durch die Spin-Bahn-Kopplung spalten somit die Energiewerte  $E_n$ , die ohne Berücksichtigung des Spins erhalten wurden, in die Werte

$$E_{nls} = E_n + E_{L,S} = E_n + \frac{Ze^2\mu_0}{8\pi m^2 r^3} (S \cdot L) \quad (5)$$

auf. Hierbei gilt, daß  $E_n \gg E_{L,S}$ . Man kann daher  $E_{L,S}$  als Störungsterm im Hamiltonoperator betrachten und die Korrekturen in erster Ordnung mit Hilfe der stationären Störungsrechnung ausrechnen. In erster Näherung ergibt sich nun die Energie des gestörten Systems, indem man zur ungestörten Energie den Erwartungswert des Störterms hinzuaddiert, dabei wird dieser Erwartungswert mit den Eigenfunktionen des ungestörten Problems berechnet.

Die energetische Aufspaltung der Spektraltermine unter dem Einfluß der Spin-Bahn-Kopplung ist also:

$$\langle E_{L,S} \rangle = \left\langle \frac{Ze^2\mu_0}{8\pi m^2 r^3} (S \cdot L) \right\rangle = \left\langle \frac{Ze^2\mu_0}{8\pi m^2 r^3} \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \right\rangle \quad (6)$$

wobei  $J$  der Operator des Gesamtdrehimpulses ist. Da nun die Eigenfunktionen  $\Psi$  des ungestörten Problems in einen Radialanteil  $R_n$  und einen Winkelanteil  $\Phi$  faktorisieren, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\langle E_{L,S} \rangle &= \int \Psi^* \frac{Ze^2\mu_0}{8\pi m^2 r^3} \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \Psi \\
&= \frac{Ze^2\mu_0}{16\pi m^2} \int \Phi^* (J^2 - L^2 - S^2) \Phi \int R_n^* \frac{1}{r^3} R_n \\
&= \frac{Ze^2\mu_0\hbar^2}{16\pi m^2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)] \int R_n^* \frac{1}{r^3} R_n
\end{aligned} \tag{7}$$

Da für ein Elektron immer  $S = \pm\frac{1}{2}$  gilt, kann der Gesamtdrehimpuls  $J$  nur die Werte  $L + 1/2$  und  $L - 1/2$  annehmen. Die Energiewerte spalten damit je nach Spinrichtung in die beiden Komponenten mit  $J = L + 1/2$  und  $J = L - 1/2$  auf. Zum Beispiel ergibt für  $L = 1$  die eckige Klammer in (7) für  $J = 3/2$  den Wert 1 und für  $J = 1/2$  den Wert -2. Genaugenommen ist es allerdings nicht zulässig hier mit dem klassischen Bahnradius zu rechnen, da der Abstand der Elektronen zum Kern nicht fest ist, sondern man nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen kann. Man müsste eigentlich den quantenmechanischen Erwartungswert verwenden:

$$\langle r^{-3} \rangle = \int R_n^* \frac{1}{r^3} R_n. \tag{8}$$

### 1.1.2 Hyperfeinstruktur

Die Hyperfeinstrukturaufspaltung ist eine Folge der Wechselwirkung des magnetischen Moments des Atomkerns mit dem magnetischen Moment der Elektronenhülle. Diese Wechselwirkung bewirkt eine gegenseitige Ausrichtung der Drehimpulse  $\vec{I}$  des Kerns und  $\vec{J}$  der Hülle.

Die Wechselwirkungsenergie ist klein gegen die Kopplungsenergie der Elektronen innerhalb der Hülle und der Nukleonen innerhalb des Kerns. Daher greift die relativ schwache Hyperfeinstrukturwechselwirkung zwischen  $\vec{I}$  und  $\vec{J}$  nicht in die innere Kopplung von Hülle und Kern ein, sondern führt lediglich zu einer Kopplung der beiden Drehimpulse zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{F}$  des Atoms  $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$ .

Zur quantitativen Berechnung der sich ergebenden Korrekturen zu den Energieniveaus, betrachtet man den Kern als praktisch punktförmig und das von der Elektronenhülle erzeugte Magnetfeld als konstant im Bereich des Kernvolumens. Die magnetische Energie ist dann  $V_{HFS} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_0$ , wobei  $\vec{\mu}_I$  das magnetische Moment des Kerns und  $\vec{B}_0$  das magnetische Feld der Hülle am Kernort ist. Man kann diese dann als Störungsterm im Hamiltonoperator betrachten und die Korrekturen in erster Ordnung wieder mit Hilfe der stationären Störungsrechnung ausrechnen.

Es gilt  $\vec{B}_0 = B_0 \frac{\vec{J}}{J\hbar}$  und  $\vec{\mu}_I = g_I \mu_K \frac{\vec{I}}{\hbar} = \frac{\mu_I \mu_K}{\hbar} \frac{\vec{I}}{I}$  mit  $g_I = \frac{\mu_I}{I}$ . Hierbei ist  $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3,152 \cdot 10^{-8} eV/T$  das Kernmagneton und  $g_I$  der sogenannte *g-Faktor*, der das Verhältnis von magnetischem Moment (in *Magnetonen*) zum Drehimpuls (in Einheiten von  $\hbar$ ) angibt.

Einsetzen von  $\vec{B}_0$  und  $\vec{\mu}_I$  ergibt

$$V_{HFS} = -\frac{\mu_I \mu_K B_0}{\hbar^2 I J} (\vec{I} \cdot \vec{J}) = -\frac{\mu_I \mu_K B_0}{\hbar^2 I J} \cdot \frac{1}{2} (F^2 - I^2 - J^2). \tag{9}$$

In erster Näherung ergibt sich nun die Energie des gestörten Systems, indem man zur ungestörten Energie den Erwartungswert des Störterms hinzuaddiert, dabei wird dieser Erwartungswert mit den Eigenfunktionen des ungestörten Problems berechnet.

$$\Delta E_{HFS} = \langle V_{HFS} \rangle = \frac{A}{2} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)] \quad (10)$$

mit  $\frac{A}{2} = -\frac{\mu_I \mu_K B_0}{2IJ}$ .

### 1.1.3 Niveaufspaltung im Magnetfeld: der normale Zeemann-Effekt

Wir betrachten nun den Effekt eines äußeren Magnetfeldes auf die Energieniveaus des Wasserstoffatoms. In einem äußeren Magnetfeld  $B$  ist die potentielle Energie eines magnetischen Dipols mit dem magnetischen Moment  $\mu$  durch  $E_{pot} = -\mu \vec{B}$  gegeben. Mit Hilfe des Drehimpulses lässt sich die potentielle Energie als

$$E_{pot} = g \frac{e}{2m_e} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

ausdrücken. Der Drehimpuls kann in der Richtung des angelegten Magnetfeldes (im weiteren die z-Richtung) nur die Werte  $m_z \hbar$  annehmen kann, so dass wir mit  $g=1$

$$E_{pot} = \frac{e\hbar}{2m_e} m_z B_z$$

erhalten. Man nennt  $m_z$  die *Orientierungsquantenzahl* oder auch *magnetische Quantenzahl*, sie kann nur die ganzzahligen Werte  $-l \leq m_z \leq l$  annehmen. Damit ergibt sich die durch das äußere Magnetfeld gegebene Zusatzenergie zu

$$E_{pot} = m_z \mu_B B_z.$$

wobei  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  das Bohrsche Magneton ist. Damit ergeben sich die Energiewerte des Atoms im Magnetfeld zu

$$E_{nlm} = E_{nl} + m_z \mu_B B_z,$$

wobei  $E_{nl}$  die Elektronenenergien im Coulomb-Feld des Kerns ohne angelegtes Magnetfeld sind. Der ohne äußeres Magnetfeld nichtentartete Zustand zu einem  $l$  spaltet also in einem äußeren Magnetfeld in  $(2l+1)$  Zeemann-Niveaus auf, mit dem Abstand  $\mu_B B$ .

## 1.2 Elektronenstruktur und Termschema von Rubidium

Rubidium ist ein wachswaches, silberweißes Alkalimetall. Es ähnelt sehr dem Kalium, ist aber noch weicher und noch reaktionsfähiger als dieses. Die frischen Schnittflächen glänzen silbrig, überziehen sich aber sofort mit einer mattgrauen Oxidschicht. Rubidium ist eines der unedelsten Metalle und daher ein sehr starkes Reduktionsmittel. Es reagiert mit allen Nichtmetallen, mit reinem Sauerstoff erfolgt sofortige Zündung. Dabei verbrennt es mit rosa-violetter Flammenfarbe. Mit Wasser reagiert es unter Wasserstoffbildung zu Rubidiumhydroxid. Der Wasserstoff

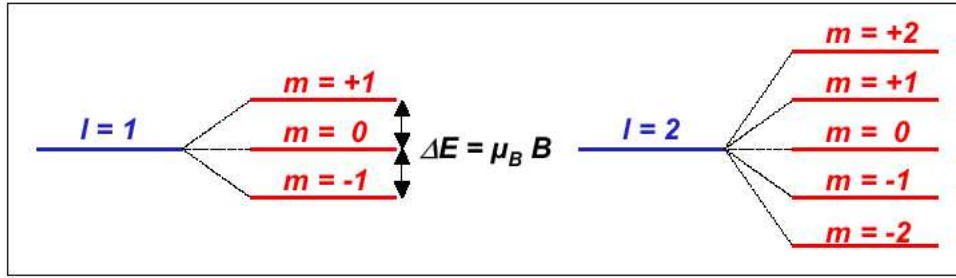


Abbildung 2: Zeemann-Splittung für  $l=1$  und  $l=0$

entzündet sich sofort, manchmal auch explosionsartig. Die gebildete Lauge ist eine sehr starke Base. Geschmolzenes Rubidium ist sehr aggressiv und greift sogar Glas und Porzellan an. Rubidiums Salze ergeben bei der Flammprobe eine rosa-violette Flammenfarbe. Das Spektrum des Rubidiums enthält eine sehr kräftige dunkelrote Dublett, nämlich die  $D_1$ -Linie mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 794,8\text{nm}$  und die  $D_2$ -Linie mit  $\lambda = 780,0\text{nm}$ . Aufgrund dieser typischen Spektrallinien erhielt das Element seinen Namen in Anlehnung an das lateinische Wort *rubidus* ("dunkelrot"). Rubidium kommt als Mischung aus zwei Isotopen, nämlich  $^{85}\text{Rb}$  und  $^{87}\text{Rb}$ , vor. Das natürliche Mischverhältnis ist 72:28.

Wie alle Alkalimetalle besitzt auch Rubidium ein schwach gebundenes äußeres Elektron, das aufgrund seiner Bedeutung für das optische Spektrum *Leuchtelektron* genannt wird. Die übrigen 36 Elektronen befinden sich in abgeschlossenen Schalen.

$1s^2$		2
$2s^2$	$2p^6$	8
$3s^2$	$3p^6$	8
$4s^2$	$3d^{10}$	18
$5s^1$		1
		37

Tabelle 1: Elektronenkonfiguration von Rubidium

Der Gesamt-Spin der Elektronen in den abgeschlossenen Schalen verschwindet, während das Leuchtelektron den Spin  $1/2$  hat. Das Termschema ähnelt daher sehr dem von Wasserstoff, wo es nur ein Elektron gibt. Die Elektronenhülle hat also insgesamt den Spin  $J=1/2$ , was zur Feinstruktur führt. Der Grundzustand mit  $L=0$  spaltet dabei nicht auf. Der erste angeregte Zustand spaltet in die Zustände  $P_{3/2}$  und  $P_{1/2}$  auf. Der Übergang von diesen beiden Zuständen in den Grundzustand ist verantwortlich für die charakteristische dunkelrote Doppellinie im Rubidium-Spektrum.

Der Kernspin führt dann zu einer weiteren Aufspaltung der Energieniveaus. Die Kerne des Isotops  $^{85}\text{Rb}$  haben einen Spin  $I=5/2$ , die Kopplung dieses Spins mit dem Hüllenspin führt zur Aufspaltung jedes Niveaus in zwei Hyperfeinniveaus mit  $F=3$  und  $F=2$ . Das seltenere Isotop  $^{87}\text{Rb}$  hat einen Kernspin von  $I=3/2$ , d.h. für die Hyperfeinniveaus gilt  $F=2$  und  $F=1$ .

Legt man nun ein äußeres Magnetfeld an, so spalten diese Hyperfeinniveaus in  $(2F+1)$  Zeeman-Niveaus auf. Beim  $^{85}\text{Rb}$  beobachtet man also eine Aufspaltung in

7 bzw. 5 Zeeman-Niveaus, während man beim  $^{87}\text{Rb}$  eine Aufspaltung in 5 bzw 3 Niveaus erwartet.

Die Hyperfeinaufspaltung und die Zeeman-Aufspaltung sind dabei deutlich kleiner als die Feinstruktur-Aufspaltung. Aufgrund der natürlichen Linienbreite der  $D_1$ -Linie lassen sich mit ihr alle möglichen Übergänge zwischen den "Unterniveaus" des  $P_{1/2}$ -Niveaus und denen des Grundzustands anregen.

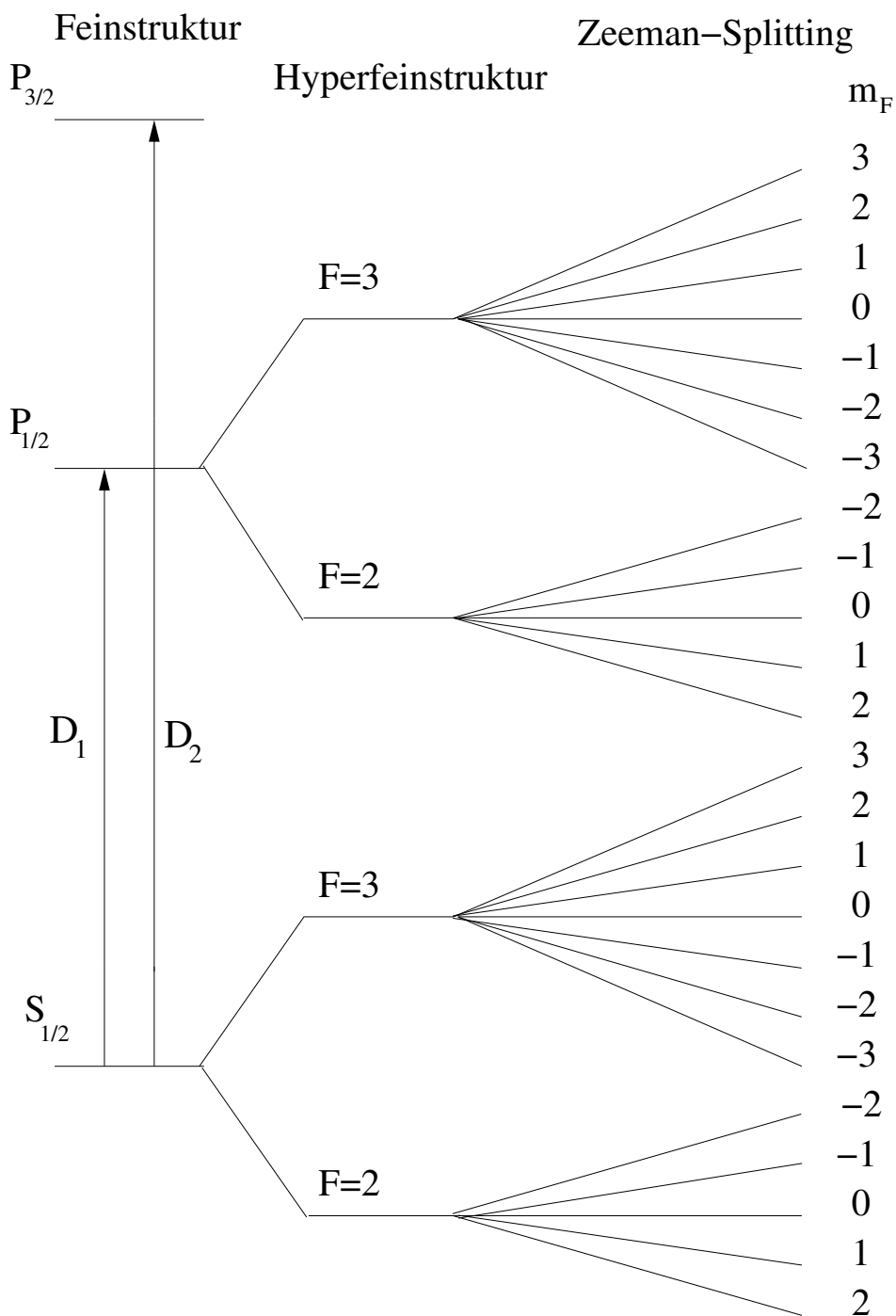


Abbildung 3: Termschema von  $^{85}\text{Rb}$



### 1.3 Optisches Pumpen

Betrachte ein System aus mehreren Teilchen, die in verschiedenen Zuständen mit verschiedenen Energien vorkommen. Die relativen Besetzungszahlen der Zustände seien durch die Boltzmannverteilung gegeben. Dann versteht man unter optischem Pumpen die Herstellung einer Besetzungszahlinversion durch Einstrahlung von Lichtquanten. Dabei werden die Teilchen durch die Photonen zunächst auf ein hohes Niveau gebracht, von wo aus sie bevorzugt auf ein Niveau zurückfallen, das über dem Ausgangsniveau liegt.

Im vorliegenden Versuch sind die Besetzungszahlen der  $^2S_{1/2}$ -Zustände von Rubidium von Interesse. Betrachte zunächst das  $^{87}\text{Rb}$ -Isotop, Termschema siehe Abbildung 3. Der  $^2S_{1/2}$ -Zustand spaltet auf in zwei Hyperfeinstrukturniveaus, von denen im Magnetfeld der obere in fünf, der untere in drei Zeemanniiveaus aufspaltet.

Um in diesem System eine Besetzungszahlinversion zu erreichen, strahlt man  $\sigma^+$ -polarisiertes Licht der  $D_1$ -Linie ein. Dieses bewirkt bei Absorption Übergänge vom  $^2S_{1/2}$  in den  $^2P_{x/2}$ -Zustand ( $x = 3$  oder  $1$ ). Ein gegebenes Photon bringt nun einen positiven Drehimpuls mit, der vom Elektron absorbiert werden muß. Deshalb muß das Elektron seine Zeemanquantenzahl  $m_F$  um 1 vergrößern.

Der angeregte Zustand zerfällt jetzt mit  $\Delta m_F = 0, \pm 1$ . Alle Zerfallsmöglichkeiten sind gleich wahrscheinlich.  $2/3$  der angeregten Elektronen werden also in einen Zustand zurückfallen, der energetisch höher liegt als ihr Ausgangszustand.

Durch Stöße mit der Wand des Gefäßes können nun Zustände höherer Energie wieder abgeregt werden. Um diesen Effekt klein zu halten, fügt man dem unter geringen Druck stehenden Rubidiumgas das kugelsymmetrische Neon hinzu, das beim Stoß keinen Drehimpuls aufnimmt.

Wählt man die Parameter Druck, Neonkonzentration, Temperatur und Einstrahlintensität geschickt, so stellt sich ein Gleichgewicht unter Besetzungszahlinversion ein.

### 1.4 Breit-Rabi-Formel

Gesucht sind die Energieeigenwerte eines Atoms mit Hyperfeinstrukturaufspaltung in einem nicht zu starken Magnetfeld  $\vec{B}_0$  bzw.  $\vec{H}_0$ . Es kommt dann zur Zeemanaufspaltung. Jedes Niveau der Hyperfeinstruktur spaltet in mehrere Zeemanniiveaus auf. Anschaulich betrachtet präzediert der Gesamtspin des Atoms  $\vec{F}$  um das angelegte Magnetfeld  $\vec{B}$ .  $\vec{F}$  entsteht durch Kopplung des Kernspins  $I$  an den Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle  $J$  (siehe Abschnitt 1.1.3).

Dabei folgt aus der Unschärferelation, daß  $\vec{F}$  nicht vollständig in Richtung des  $\vec{B}$ -Feldes zeigen kann. Man kann auch zeigen, daß die Projektion von  $\vec{F}$  auf die  $\vec{e}_{\vec{H}_0}$ -Achse nur  $2F + 1$  ganzzahlige Werte  $m_F$  von  $-F$  bis  $+F$  annimmt. Für ein Beispiel mit  $F = 2$  siehe Abbildung 4.

Die Energie eines Zustands hängt nun von der Einstellung von  $\vec{F}$  zum Magnetfeld ab. Ist die Gesamtdrehimpulsquantenzahl der Elektronenhülle  $J$  gegeben durch  $\pm \frac{1}{2}$  und ist das Magnetfeld nicht zu stark, so gilt für die Energieeigenwerte der

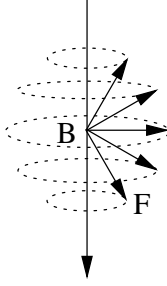


Abbildung 4: Einstellungsmöglichkeiten von  $\vec{F}$  im magnetischen Feld

Zeemanniiveaus  $W(F, m_F)$  die Breit-Rabi-Formel:

$$W(F, m_F) = -\frac{\Delta W}{2(2I + 1)} + \mu_B g_I H_0 m_F \pm \frac{\Delta W}{2} \sqrt{1 + \frac{4m_F}{2I + 1}x + x^2} \quad (11)$$

Dabei ist  $g_J$  der Landéfaktor der Hülle und  $g_I \cdot \frac{m_p}{m_e}$  der Landéfaktor des Kerns.  $x$  wird der besseren Lesbarkeit halber eingeführt als  $x = \frac{g_J - g_I}{\Delta W} \mu_B H_0$ .

## 1.5 Linienbreiten

Bei der Absorption oder Emission elektromagnetischer Strahlung, die zu einem Übergang  $\Delta E = E_i - E_k = h\nu_{ik}$  zwischen zwei Energieniveaus des Atoms führt, wird eine Frequenz  $\nu_{ik}$  abgestrahlt bzw. aufgenommen, die nicht streng monochromatisch ist. Der verwendete Spektralapparat hat eine bestimmte Spektralaufösung. Deshalb gibt es eine Verteilung  $P_\nu(\nu_{ik})$  der emittierten bzw. absorbierten spektralen Strahlungsleistung um eine Mittenfrequenz  $\nu_0 = \nu_{ik}$ .  $P_\nu(\nu)$  ist die spektrale Leistungsdichte, die von der Lichtquelle im Frequenzintervall  $\Delta\nu = 1\text{s}^{-1}$  um Frequenz  $\nu$  abgestrahlt wird.  $P_\nu(\nu - \nu_0)$  ist das Linienprofil einer Spektrallinie. Das Frequenzintervall  $\delta\nu = |\nu_1 - \nu_2|$  heißt *Halbwertsbreite*, bei der die emittierte spektrale Leistungsdichte  $P_\nu(\nu)$  auf  $1/2P_\nu(\nu_0)$  abgesunken ist.

$$\delta\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2) = (c/\nu_1 - c/\nu_2)$$

$$\delta\lambda = -\frac{c}{\nu^2}\delta\nu = -\frac{\lambda}{\nu}\delta\nu.$$

$$\left| \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{\delta\nu}{\nu} \right| = \left| \frac{\delta w}{w} \right|.$$

## 1.6 Verbreiterungsmechanismen

Für die endliche Linienbreite gibt es viele Gründe, von denen natürliche Linienbreite, Doppler-Verbreiterung und Druckverbreiterung wichtig sind.

### 1.6.1 Natürliche Linienbreite

Durch die Unschärfe der Energieniveaus in Atomen ergibt sich die sogenannte natürliche Linienbreite, die normalerweise sehr klein ist. Diese Linienverbreiterung

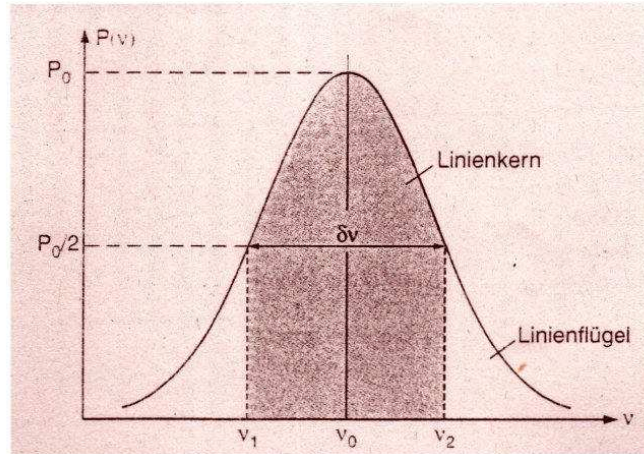


Abbildung 5: *Linienprofil einer Spektrallinie Quelle: [1]*

wird Strahlungsdämpfung genannt, weil sie eben mit der endlichen Länge der Wellenzüge, ihrer Dämpfung, zu tun hat. Beim klassischen harmonischen Oszillator wird die Eigenfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{D/m}$  mit der Masse  $m$  und der Rückstellkonstanten  $D$  beschrieben.

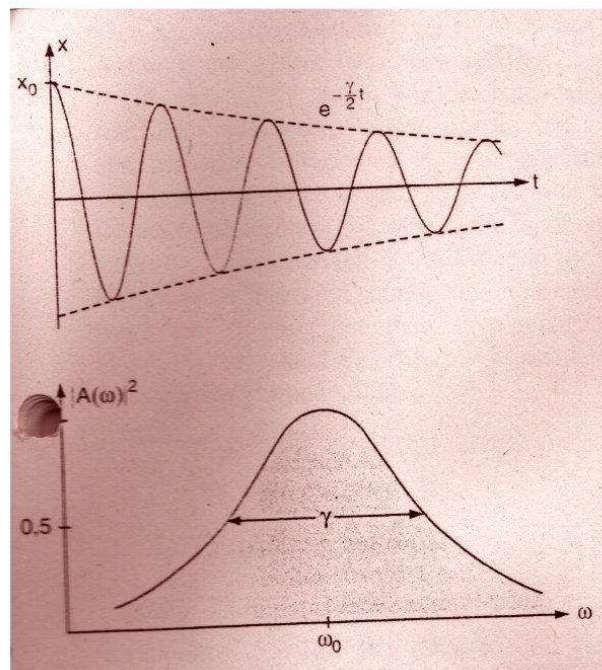


Abbildung 6: **a)** *Gedämpfte Schwingung. b)* *Linien-Lorentzprofil  $|A(\omega)|^2$  als Fouriertransformierte einer gedämpften Schwingung. Quelle: [1]*

Die Bewegungsgleichung für den klassischen gedämpften harmonischen Oszillator lautet:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$\gamma$  ist die Dämpfungskonstante. Gelöst wird sie durch:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-(\gamma/2)t} [\cos wt + (\gamma/2w) \sin wt] \quad (12)$$

wobei die Frequenz

$$w = \sqrt{w_0^2 - (\gamma/2)^2}$$

ist. Wegen der Dämpfung ist  $w$  kleiner als  $w_0$ . Allgemein kann man

$$\gamma \ll w_0$$

annehmen. Deshalb kann

$$w \approx w_0$$

gesetzt werden. Dann haben wir als Lösung

$$x(t) \approx x_0 \cdot e^{-(\gamma/2)t} \cdot \cos w_0 t.$$

Die Amplitude ist hier abhängig von der Frequenz  $w$ , und kann durch eine Fourier-Transformation beschrieben werden.

$$A(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-iwt} dt \quad (13)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x_0 \cdot e^{-(\gamma/2)t} \cos w_0 t \cdot e^{-iwt} dt \quad (14)$$

$$A(w) = \frac{x_0}{\sqrt{8\pi}} \left[ \frac{1}{i(w_0 - w) + \gamma/2} + \frac{1}{i(w_0 + w) + \gamma/2} \right] \quad (15)$$

Die abgestrahlte spektrale Leistung ist

$$P_w(w) \propto A(w) \cdot A^*(w),$$

nimmt also in der Umgebung der Frequenz  $w_0$  das Linienprofil

$$P_w(w) = \frac{C}{(w - w_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$

an, das Lorentzprofil heißt.

$$C = P_0 \cdot \frac{\gamma}{2\pi}$$

**Die natürliche Linienbreite** ist die Halbwertsbreite des Lorentzprofils. Sie entsteht nur durch die endliche Abstrahldauer des Atoms. Die Halbwertsbreite  $\delta w_n$  ist gleich

$$\delta w_n = \gamma \Rightarrow \delta \nu_n = \gamma/2\pi.$$

Die mittlere Lebensdauer  $\tau$  erfüllt dann die Gleichung  $\tau = 1/\gamma$ . Auch wissen wir die mittlere Lebensdauer eines Atomzustandes  $\tau_i = 1/A_i$ : Sie wird durch den Einstein-Koeffizienten  $A_i$  der spontanen Emission bestimmt. Dann

$$\delta w_n = A_i = \frac{1}{\tau_i} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \delta \nu_n = \frac{A_i}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau_i} \quad (17)$$

Was wir gefunden haben, können wir auch aus der Heisenbergschen Unschärfere-lation herleiten. Es gilt  $\Delta E_i = \hbar/\tau_i$ ; von dieser Gleichung kennen wir die Energie, die bei einem Übergang  $E_i \rightarrow E_k$  abgegeben wird. Die entsprechende Frequenz läßt sich bestimmen durch

$$\Delta\nu = \Delta E/h = \frac{1}{2\pi\tau_i} \Rightarrow \Delta\nu = \delta\nu_n.$$

Beide Energieniveaus haben verschiedene Lebensdauern  $\tau_i, \tau_k$ . Die entsprechen- den Energieunschärfen beider Niveaus addieren sich:

$$\Delta E = \Delta E_i + \Delta E_k \quad (18)$$

$$\Rightarrow \delta\nu_n = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_k} \right) \quad (19)$$

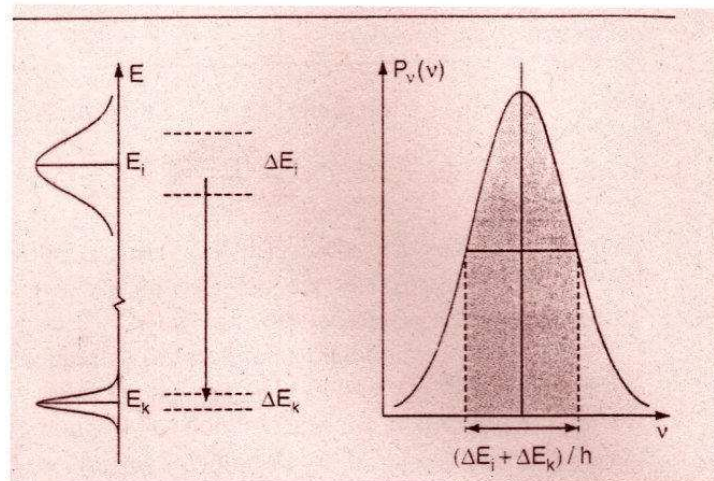


Abbildung 7: Natürliche Linienbreite als Folge der Energieunschärfe der am Übergang beteiligten Niveaus. Quelle: [1]

### 1.6.2 Doppler-Verbreiterung

Wenn sich ein angeregtes Atom mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$  bewegt, wird die Mittenfrequenz  $\omega_0$  des vom Atom in Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  emittierten Lichtes für einen ruhenden Beobachter infolge des Dopplereffektes verschoben zu

$$\omega_e = \omega_0 + \vec{k} \cdot \vec{v}$$

mit

$$|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda.$$

Für die Absorptionsfrequenz gibt es die Gleichung

$$\omega = \omega_a = \omega_0 + \vec{k} \cdot \vec{v}.$$

Wenn  $\vec{k} = \{0, 0, k_z\}$  und  $\vec{k} \cdot \vec{v} = k_z \cdot v_z$  sind, ist die Absorptionsfrequenz

$$w_a = w_0 + k_z \cdot v_z = w_0(1 + v_z/c).$$

Im thermischen Gleichgewicht ist die Geschwindigkeit der Atome eines Gases durch die Maxwell'sche Verteilung gegeben. Die Zahl der Atome pro Volumeneinheit im absorbierenden Zustand  $E_i$  mit Geschwindigkeitskomponenten  $v_z$  zwischen  $v_z$  und  $v_z + dv_z$  ist

$$n_i(v_z)dv_z = \frac{N_i}{v_w \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-(v_z/v_w)^2} dv_z,$$

wobei  $v_w = (2k_B T/m)^{1/2}$  die wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist.

$$N_i = \int_{-\infty}^{+\infty} n_i(v_z)dv_z$$

ist die Gesamtzahl aller Atome im  $E_i$  Zustand pro Volumeneinheit. Wir können die Zahl der Atome in  $w$  ausdrücken;

$$n_i(w)dw = \frac{c \cdot N_i}{w_0 \cdot v_w \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-[c(w-w_0)/(w_0 v_w)]^2} dw.$$

Die emittierte bzw. absorbierte Strahlungsleistung  $P(w)$  ist proportional zu  $n_i(w)$ , dann

$$P(w) = P(w_0)e^{[c(w-w_0)/(w_0 v_w)]^2}$$

Ihre volle Halbwertsbreite  $\delta w_D = |w_1 - w_2|$  mit  $P(w_1) = P(w_2) = (1/2)P(w_0)$  heißt *Dopplerbreite*.

$$\delta w_D = 2\sqrt{\ln 2} \cdot w_0 v_w / c$$

wenn man  $v_w = (2k_B T/m)^{1/2}$  einsetzt, dann ist die Dopplerbreite

$$\delta w_D = (w_0/c) \sqrt{(8k_B \cdot T \ln 2)/m} \quad (20)$$

$$\delta \nu_D = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{(2RT/M) \cdot \ln 2} \quad (21)$$

$$= 7,16 \cdot 10^{-7} \nu_0 \cdot \sqrt{T/M} \dots^{-1}, \quad (22)$$

wenn  $M = N_A \cdot m$  ( $N_A$  ist Avogadrozahl)  $R = N_A \cdot k_B$  und  $\nu = w/2\pi$  sind. T ist in K und M ist in g/mol.

### 1.6.3 Stoßverbreiterung von Spektrallinien

Wenn sich einem Atom A mit den Energieniveaus  $E_i$  und  $E_k$  ein anderes Atom bzw. Molekül B nähert, dann werden wegen der Wechselwirkung zwischen A und B die Energieniveaus von A verschoben. Diese Energieverschiebung hängt davon ab

1. der Struktur der Elektronenhüllen von A und B
2. gegenseitigen Abstand R(A,B)

Die Energieverschiebung hat unterschiedliche Werte für die einzelnen Energieniveaus  $E_i$  und kann negativ (bei anziehender WW) oder positiv sein (bei abstoßendem Potential zwischen  $A_i(B)$  und  $B$ ).

Bei einem Übergang zwischen Niveaus  $E_i$  und  $E_k$  während des Stoßes hängt die Frequenz  $\nu_{ik}$  des emittierten bzw. absorbierten Lichtes

$$h\nu_{ik} = |E_k(R) - E_i(R)|$$

von der Differenz der Potentialkurven beim Abstand  $R$  zwischen  $A$  und  $B$  während der Lichtemission ab. Wenn es ein Gasgemisch gibt, dann sind  $R$  Abstände um einen Mittelwert  $\bar{R}$ , der von Druck und Temperatur abhängt, und  $\nu_{ik}$  auch um  $\bar{\nu}$  statistisch verteilt. Es gibt zwei verschiedene Stoßarten, die

1. **elastischen Stöße:** Die Stöße verursachen Linienverbreiterung  $\delta\nu$  und Linienverschiebung  $\Delta\nu$ . Die Energiedifferenz  $h \cdot \Delta\nu = E_i - E_k$  wird bei positivem  $\Delta\nu$  durch die kinetische Energie der Stoßpartner, nicht durch die innere Energie eines Stoßpartners geliefert. Bei negativem  $\Delta\nu$  wird die Übergangenergie in kinetische Energie umgewandelt. Sie ändert nur die Phase der Oszillatorschwingung. Deswegen werden elastische Stöße auch **Phasenstörungsstöße** genannt.
2. **inelastischen Stöße:** Bei denen die Anregungsenergie  $E_i - E_k$  ganz oder teilweise in innere Energie des Stoßpartners  $B$  umgewandelt wird oder in Translationsenergie beider Stoßpartner. Sie vermindern die Besetzungszahl von  $E_i$  und damit die Fluoreszenz von  $E_i$ . Sie führen zu einer Verbreiterung der Spektrallinien. Sie ändern die Amplitude der Oszillatorschwingung. Man kann das durch eine zusätzliche Dämpfungskonstante  $\gamma_{Stoß}$  beschreiben.

$$\delta\omega = \gamma_n + \gamma_{Stoß}$$

ist dann die Linienbreite eines Lorentz-Profiles.  $\gamma_n$  ist die durch die Strahlung bewirkte Dämpfung.

Wenn ein angeregtes Atomniveau  $E_i$  durch Stoß mit  $B$  ohne Lichtemission in den Zustand  $E_k$  übergeht, wofür es die Wahrscheinlichkeit  $R_{ik}$  gibt, (das wird **Stoßinduzierte Relaxation** genannt), ist die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit vom Niveau  $E_i$  in andere Zustände  $E_k$  des Atoms

$$A_i = \sum_k A_{ik}(spontan) + \sum_k R_{ik}$$

mit der stoßinduzierten Übergangswahrscheinlichkeit

$$R_{ik} = N_B \sigma_{ik} \sqrt{8k_B T / \pi \mu}.$$

**Die effektive Lebensdauer  $\tau_{eff} = \frac{1}{A_i}$  des Niveaus  $E_i$  wird durch die Stöße verkürzt.** Deswegen wird die Linienbreite der Strahlung größer. Wegen  $\delta\nu_{ik} =$

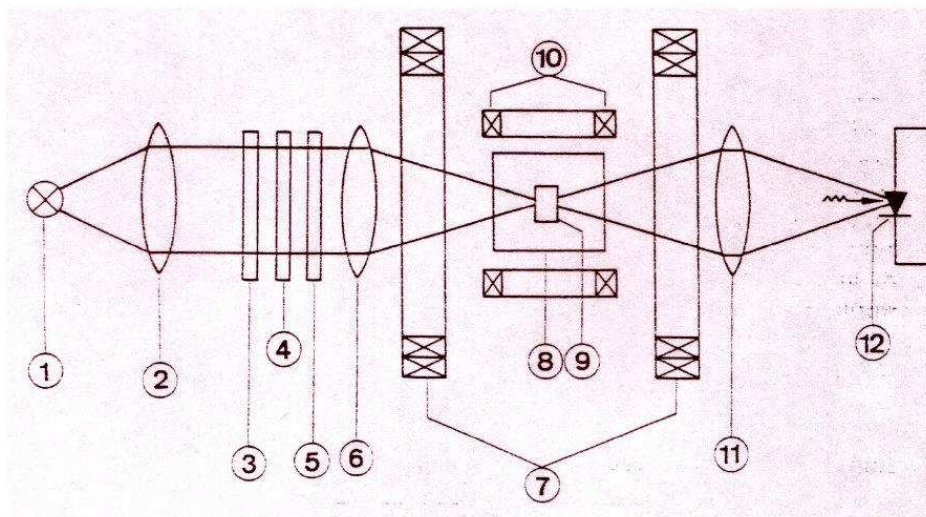


Abbildung 8: Schematische Zeichnung des Versuchs. Quelle: Versuchsanleitung.

$A_{ik}/2\pi$  steigt  $\delta\nu$  linear mit der Dichte  $N$  (mit dem Druck der Komponente B) an. Das Linienprofil für elastische und inelastische Stöße ist

$$P_w(w) = P_0 \frac{(\frac{\gamma_n + \gamma_{in}}{2} + N\bar{v}\sigma_b)^2}{(w - w_0 - N\bar{v}\sigma_s)^2 + (\frac{\gamma_n + \gamma_{in}}{2} + N\bar{v}\sigma_b)^2},$$

wobei  $N$  die Dichte der stoßenden Moleküle  $B$ ,  $\bar{v}$  die mittlere Relativgeschwindigkeit und  $P_0 = P_w(w'_0)$  die spektrale Strahlungsleistung im Linienmaximum bei der verschobenen Frequenz  $w'_0 = w_0 + N\bar{v}\sigma_s$  ist.

## 1.7 Versuchsaufbau

Erläuterung der Zahlen in Abbildung 8.

1. ist die **Pumplichtquelle**. Als Pumplichtquelle wird eine Rb-Hochfrequenzlampe benutzt.
2. zeigt **die Linse**, die das von der Quelle kommende Licht parallel stellt.
3. ist der **Interferenzfilter**. Das ist eine dielektrische planparallele Platte, die teilweise reflektierend ist und nur einen Teil des Spektralbereichs der einfallenden Strahlung passieren läßt. Die durchgelassene Strahlung ist diejenige, die die Bedingung für konstruktive Vielstrahlinterferenz erfüllt:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne \cos \beta = 2m\pi$$

( $m$  ganzzahlig).  $\lambda$  ist Vakuumwellenlänge. Wenn man Strahlung der Wellenlänge  $\lambda_1$  durchlassen möchte, soll man die Dicke so

$$2ne = m\lambda_1$$



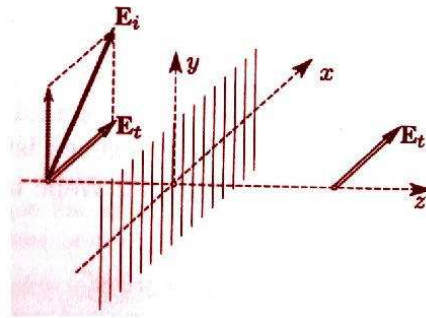


Abbildung 9: Die vom Gitter durchgelassene Richtung des elektrischen Feldes ist senkrecht zu der Richtung des Gitters. Da entlang der Richtung des Gitters die Elektronen durch die Lichtwelle in Schwingung versetzt werden, diese Energie aber dissipiert (durch Reibungsverluste), sind die Verluste an elektromagnetischer Energie in dieser Richtung gross. In der dazu senkrechten Richtung ist die Absorption der Welle durch Gitterelektronen vernachlässigbar, so dass in dieser Richtung die Welle fast ungedämpft durch das Gitter tritt. Diese Polarisatoren werden bevorzugt im Infrarotbereich benutzt, da hier die Gitter leicht herzustellen sind. Quelle: [7]

wählen. Allgemein ist die ganze Zahl  $m$  eins angenommen, weil die Strahlung mit Wellenlängen  $\lambda_1, \lambda_2, ..$  mit

$$m\lambda_1 = (m + 1)\lambda_2 = (m + 2)\lambda_3 = ..$$

außerhalb des sichtbaren Bereichs liegt. Es gibt eine wichtige Eigenschaft der Interferenzfilter. Sie ist die spektrale Breite der quasimonochromatischen Strahlung, die sie durchlassen. Die Größe ist als  $\Delta\lambda_{\frac{1}{2}}$  definiert und hängt mit der Halbwertsbreite der Peaks der durchgelassenen Intensität zusammen. Das Auflösungsvermögen ist

$$\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda_{\frac{1}{2}}} = p \cdot F = F = \frac{\pi R^{\frac{1}{2}}}{1 - R}$$

4. ist der **lineare Polarisationsfilter**. Die linear polarisierte Welle bedeutet, dass die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ihre Richtungen im Raum während ihrer Ausbreitung beibehalten. Die Ebene, die durch  $\vec{E}$  und  $\vec{k}$  aufgespannt wird, heisst Polarisationsebene. Polarisationsfilter werden auch Polaroidfilter oder Polarisationsfolien genannt. Die Polaroidfolien sind mechanisch gestreckte Kunststoffolien, in die längliche Farbstoffmoleküle eingelagert sind. Man erhält so ein Kunststoffgitter, das sich wie ein Metallgitter verhält: Die Komponente des elektrischen Feldes entlang der Gitterrichtung wird stark absorbiert (Durchlässigkeit von der Ordnung 0,0002%) während die dazu senkrechte Richtung zu ungefähr 50% durchgelassen wird. Das austretende Lichtbündel ist daher polarisiert.

5. ist das  **$\lambda/4$ -Plättchen**

Das Prinzip der  $\lambda/4$ -Plättchen-Methode ist, die elliptische Polarisation, die aus dem zu untersuchen Kristallplättchen tritt, in eine lineare Polarisation zu überführen. Um eine elliptische Welle in eine linear polarisierte Welle zu überführen, genügt es,

$$D_Y = i\sqrt{2}D_m \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \exp\left(i\frac{\phi}{2}\right) \exp(-i\omega t)$$

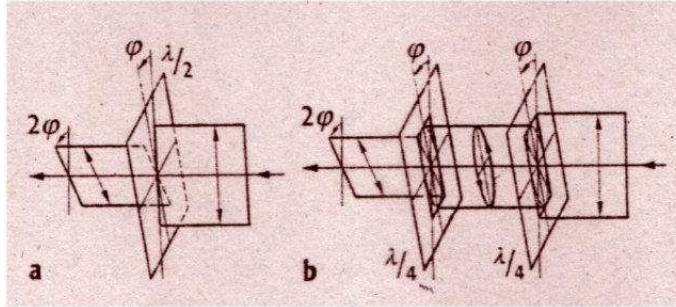


Abbildung 10: **Phasenplättchen**: Phasenplättchen (a:  $\lambda/4$ -Plättchen, b: zwei  $\lambda/4$ -Plättchen) führen zu einer Änderung der Polarisationsrichtung einer transmittierten polarisierten Lichtwelle. Quelle: [4]

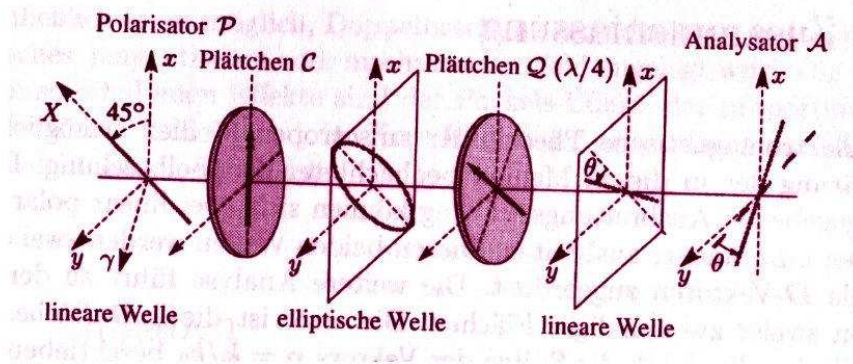


Abbildung 11: Die Basis  $(e_X, e_Y)$ , die durch Rotation um  $45^\circ$  aus der alten Basis entsteht. Quelle: [6]

mit  $\pm i$  multiplizieren, d.h. eine Phasenverschiebung von  $\pm\pi/2$  einzuführen. **Dies ist genau das, was ein  $\lambda/4$ -Plättchen, dessen Achsen mit den Richtungen des Analysators und des Polarisators übereinstimmen, realisiert.**

$$D_X = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_x + D_y)$$

$$D_Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-D_x + D_y),$$

wobei  $D_x = D_m \exp(-i\omega t)$  und  $D_y = D_m \exp(i\phi) \exp(-i\omega t)$ . Dieses sind die Komponenten des Feldes  $\vec{D}$ .

Dann haben wir nach Passieren des  $\lambda/4$ -Plättchens die neuen Komponenten

$$D_X = \sqrt{2} D_m \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \exp\left(i\frac{\phi}{2}\right) \exp(-i\omega t)$$

und

$$D_Y = \pm \sqrt{2} D_m \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \exp\left(i\frac{\phi}{2}\right) \exp(-i\omega t).$$

Die aus dem System Kristallplättchen ausgesandte Welle ist eine linear polarisierte Schwingung, die in einem Winkel  $\theta = \phi/2 + m\pi$  zu der Polarisatorrichtung steht.

Wenn man den Analysator um den Winkel  $\theta$  dreht, kann man die anfängliche Auslösung wiederherstellen. Daraus folgert man auf  $\theta = 2\pi(n_0 + n_E)/\lambda_0$  und damit auf  $d(|n_0 - n_e|) = (4m + 1)\lambda_0/4$  bei bekannter Plättchendicke und Wellenlänge  $\lambda_0$ . Hier ist ein wichtiger Punkt, dass das  $\lambda/4$ -Plättchen der verwendeten Wellenlänge des monochromatischen Lichtes angepasst sein muss und dass der Winkel  $\theta/2$  nur bis auf  $m\pi$  bestimmt ist, was die Methode auf solche Fälle beschränkt, in denen Phasendifferenzen kleiner als  $\pi$  sind. Wenn ausserdem die lineare Polarisation in einem Winkel von  $45^\circ$  zu den Achsen des Plättchen steht, ist die austretende Welle zirkular polarisiert. Wenn sie sehr dünn sind und sich zwischen einem Polarisator und einem Analysator befinden, gekreuzt oder parallel sind, geben sie sehr kontrastreiche und helle Interferenzen.

6. ist auch *eine Linse*, die durch den Filter kommendes Licht in die Absorptionzelle schickt.

7. sind die *Helmholtz-Spulen*, die das für die Zeeman-Aufspaltung benötigte Magnetfeld erzeugen. Die Achse dieser Spulen ist gleich mit der optischen Achse der Versuchsanordnung.

8. zeigt das *Absorptionsgefäß*, in dem sich die Absorptionzelle befindet.

9. ist *Absorptionzelle*, die Rb in einer Trägergasfüllung aus 50 Torr Neon enthält und sich in einem Wasserbad befindet, das mit einem Umlaufthermostaten auf einer konstanten Temperatur von etwa  $70^\circ$  gehalten wird. In der Zelle gibt es wegen der optischen Übergänge durch das Pumplicht und gleichzeitig stattfindender Relaxationsprozesse eine Polarisation des Rb-Dampfes. Bei diesen Relaxationsvorgängen sind die die Polarisation zerstörenden Stöße von Rb-Atomen mit der Gefäßwand wichtig. Um diesen herauskommenden Nachteil zu verringern, gibt es das Trägergas, das das aus kugelsymmetrischen Atomen bestehende Neon ist.

10. ist die *HF-Spule*, die senkrecht zur optischen Achse der Versuchsanordnung und auch zum Helmholtzspulenfeld ist. Zum Helmholtzspulenfeld senkrecht zu sein gibt die Möglichkeit, dass das für die Zeemanübergänge benötigte zirkularpolarisierte HF-Magnetfeld aus dem linearpolarisierten HF-Spulenfeld erzeugt wird. Das linear polarisierte HF-Feld kann in ein links- und rechtsumlaufendes zirkularpolarisiertes Feld zerlegt werden. Die Komponenten sind  $\Delta m_F = \pm 1$  Übergänge im Rb-Dampf der Zelle. Ein HF-Funktionsgenerator mit langsamem Frequenzsweep liefert an seinem  $50\Omega$  Ausgang die HF-Betriebsspannung für diese Spule. Seine maximale Ausgangsspannung ist  $20V_{pp}$

11. ist auch *eine Linse*, die von der Absorptionzelle kommende Strahlung zum Detektor schickt.

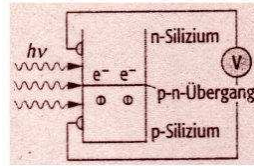


Abbildung 12: **Photodiode:** Beim Durchgang von Strahlung durch die Verarmungszone entstehen Elektron-Loch-Paare, die durch die angelegte Spannung getrennt werden. Quelle: [1]

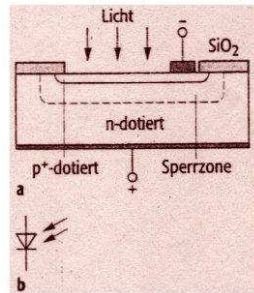


Abbildung 13: **Photodiode:** a) Schematischer Aufbau ( $p^+$ : stark  $p^-$  dotiert); b) Symbol. Quelle: [1]

12. ist der **Silizium Photodetektor**, der Photodioden-Detektor, der zu den Halbleiterzählern gehört. Es handelt sich um eine p-n Halbleiterdiode, deren Strom-Spannungs-Charakteristik wegen ihrer photoleitenden Eigenschaften empfindlich von ihrer Bestrahlung abhängt. Ein einfallendes Photon kann ein Elektron-Loch-Paar und damit bewegliche Ladungsträger erzeugen. Die Charakteristik  $I(U)$  des p-n Übergangs ist

$$I = I_0 \cdot e^{\left(\frac{U}{U_0}\right)} - (I_0 + I_{ph}).$$

Dabei ist  $I_{ph}$  der photoelektrische Strom, der proportional zum Lichtstrom  $\Phi$  ist, der den Übergang belichtet,  $I_0$  ist der Sättigungsdunkelstrom und  $U_0$  die charakteristische Spannung  $k_B T / q_e$  bei der Temperatur  $T$ .

Photodiode werden im allgemeinen im 3. Quadranten der Charakteristik, in dem  $|U| \ll U_0$  gilt, betrieben. Der Arbeitspunkt befindet sich auf der Geraden  $I = -U/R + e/R$ ,  $R$  ist der Widerstand des Stromkreises und  $e$  seine elektromotorische Kraft. Die Lichtintensität ist proportional zu  $\Phi$ . Die Sättigungsspannung  $U_s$  muss nicht erreicht werden.

Die Photodioden aus Silizium sind am weitesten verbreitet. Der Benutzungsbereich liegt zwischen sichtbarem und nahem infraroten (830nm) Spektralbereich. Hier wird als Vorspannung 9V benutzt. Allgemein wird die Photodiode in der Brennebene einer konvergenten Linse angeordnet. Diodensignal wird nach starker Integration mit einem RC-Glied und einem Speicheroszillographen nachgewiesen.

Interferenzfilter oder Linienfilter sind Lichtfilter, die durch Interferenz ein oder mehrere Wellenlängengebiete auslöschen und dadurch, meist in Verbindung mit

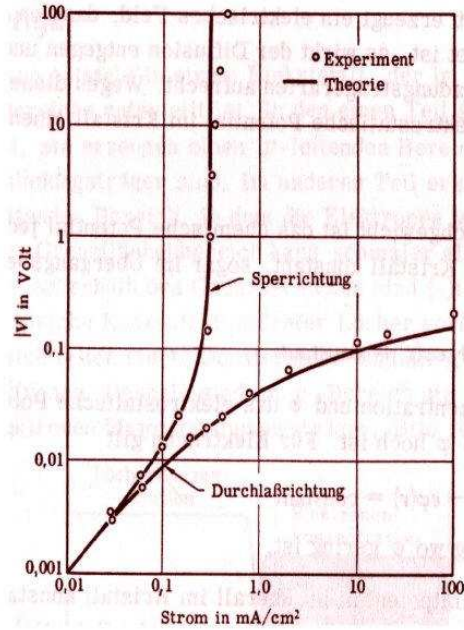


Abbildung 14: Gleichrichtungscharakteristik eines p-n-Überganges in Germanium, nach Shockley. Die Spannung ist senkrecht und der Strom waagrecht aufgetragen. Quelle: [1]

geeigneten Farbgläsern, oft nur sehr enge Wellenlängengebiete durchlassen oder reflektieren.

## 1.8 Zeeman-Effekt

Unter dem Zeeman-Effekt versteht man die Aufspaltung von Emissions- oder Absorptionslinien unter dem Einfluss magnetischer Felder. Jede Linie wird dabei in mehrere Komponenten verschiedener Frequenz aufgespalten. Je nach Art des betrachteten Terms unterscheidet man zwischen normalem und anomalem Zeeman-Effekt.

**Normaler Zeeman-Effekt.** Bei Singulett-Termen und bei sämtlichen Termen des Wasserstoff-Atoms tritt der normale Zeeman-Effekt auf. Dabei wird jeder Term in eine Anzahl äquidistanter Linien aufgespalten. Die Energiedifferenz zweier Linien beträgt dabei immer

$$\Delta E = \mu_B \cdot H,$$

wobei  $\mu_B = \frac{e \cdot h}{4\pi \cdot m_0 \cdot c}$  das Bohr'sche Magneton und  $H$  die magnetische Erregung ist. Den Auswahlregeln zufolge erscheinen im Linienbild nur drei Komponenten mit diesem Abstand, d.h. mit einer Frequenzdifferenz von  $\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h}$ . Diese Frequenzdifferenz der Linien ist genau die Larmor-Frequenz, die ein Elektron ohne Spin in diesem Magnetfeld hätte.

**Anomaler Zeeman-Effekt.** Hat man es nicht mit einem Singulett-Term oder mit Wasserstoff zu tun, so tritt der anomale Zeeman-Effekt auf. Dabei wird jeder

Term ebenfalls in äquidistante Linien aufgeteilt. Die Energiedifferenz kann jedoch nun von Term zu Term und sogar von Ausgangs- zu Endterm verschieden sein. Die Energiedifferenz benachbarter Linien ist nun

$$\Delta E = g \cdot \mu_B \cdot H,$$

wobei  $g$  der Landé-Faktor oder auch g-Faktor des betreffenden Terms ist.

**Besetzungszahldifferenz im thermischen Gleichgewicht.** Die Energiedifferenz der Zeeman-Niveaus im Grundzustand liegt in der Größenordnung MHz, also um neun bzw. vier Zehnerpotenzen niedriger als bei der Fein- bzw. Hyperfeinaufspaltung. Daher ist die Besetzungszahldifferenz im thermischen Gleichgewicht verschwindend niedrig.

## 1.9 Mehrquantenübergänge

Durch Anlegen eines zirkularpolarisierten HF-Magnetfeldes werden Übergänge zwischen den verschiedenen Zeeman-Niveaus induziert. Ist die HF-Feldstärke gering, so bewirkt jedes absorbierte HF-Quant einen induzierten Übergang zwischen zwei benachbarten Zeeman-Niveaus. Erhöht man nun die HF-Feldstärke, so werden auch Zweiquantenübergänge möglich. Dabei werden in einem Prozess zwei HF-Quanten der halben Übergangsenergie absorbiert. Die Wahrscheinlichkeit der Zweiquantenübergänge ist proportional zum Quadrat der HF-Feld-Intensität.

Speziell für die Übergänge  $F = 2, m_F = 2$  nach  $m_F = 1$ , Frequenz  $\omega_1$ , und  $F = 2, m_F = 1$  nach  $m_F = 0$ , Frequenz  $\omega_2$ , ist die Frequenz der Zweiquantenübergangslinie  $F = 2, m_F = 2$  nach  $m_F = 0$  dann  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ . Die Übergangslinie befindet sich also genau zwischen den beiden Einquanten-Übergangslinien.

## 2 Auswertung

### 2.1 Magnetfeld

Das Magnetfeld im Zentrum der Helmholtzspulen berechnet sich nach der bekannten Formel

$$\vec{B}(z = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{N\mu_0 I}{R} \vec{e}_z \quad (23)$$

Dabei ist  $N = 210 \pm 1$  die Anzahl der Windungen beider Spulen,  $R = (0,115 \pm 0,001)\text{m}$  der Radius bzw. Abstand der Spulen. Mit Hilfe des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes ergibt sich

$$\Delta B = B \sqrt{\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2}.$$

Die Zahlenwerte finden sich in Tabelle 2.

$I$ [mA]	$B$ [mT]	$\Delta B$ [mT]
840	1.38	0.01
890	1.46	0.01
-840	-1.38	-0.01
-890	-1.46	-0.01

Tabelle 2: Magnetfeldstärke im Zentrum der Helmholtzspule

## 2.2 Graphische Darstellung der Spektren

In Abbildungen 15-20 sind die aufgenommenen Spektren graphisch dargestellt.

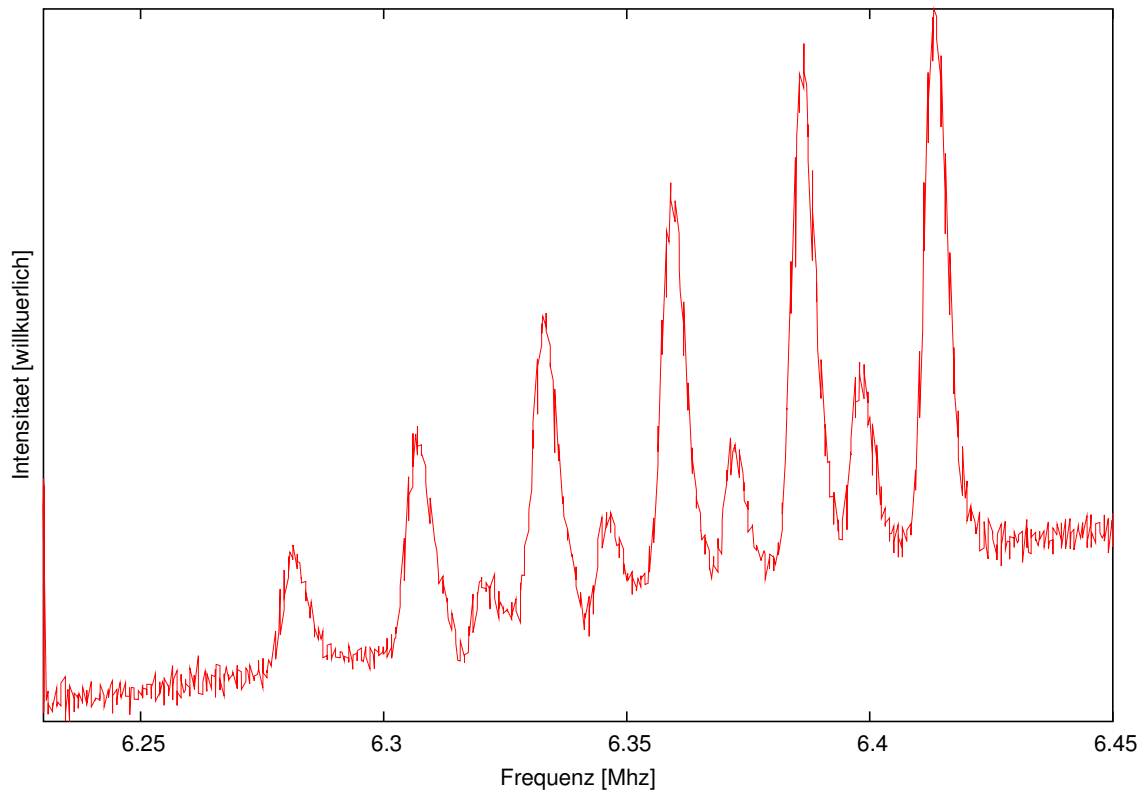


Abbildung 15: Absorptionslinien für  $^{85}\text{Rb}$  bei 840 mA.

## 2.3 Position der Maxima

Aus den Graphen und Wertetabellen ergeben sich als Positionen der Maxima die in Tabellen 3-4 aufgeführten.

## 2.4 Näherung der Breit-Rabi-Formel

Störend an der Breit-Rabi-Formel ist nur die Wurzel. Dem Tipp folgend wird diese nach Taylor entwickelt. Bekanntermaßen gilt für  $t \ll 1$

$$\sqrt{1+t} \approx 1 + \frac{1}{2}t.$$

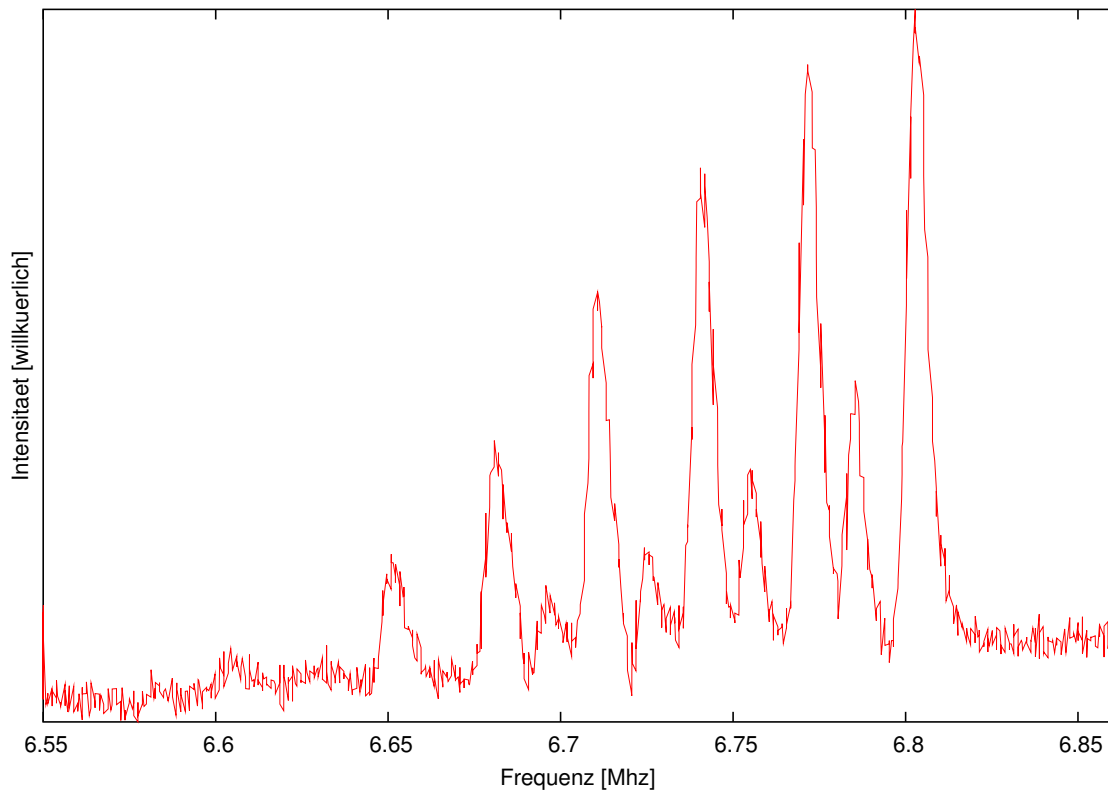


Abbildung 16: Absorptionslinien für  $^{85}\text{Rb}$  bei 890 mA.

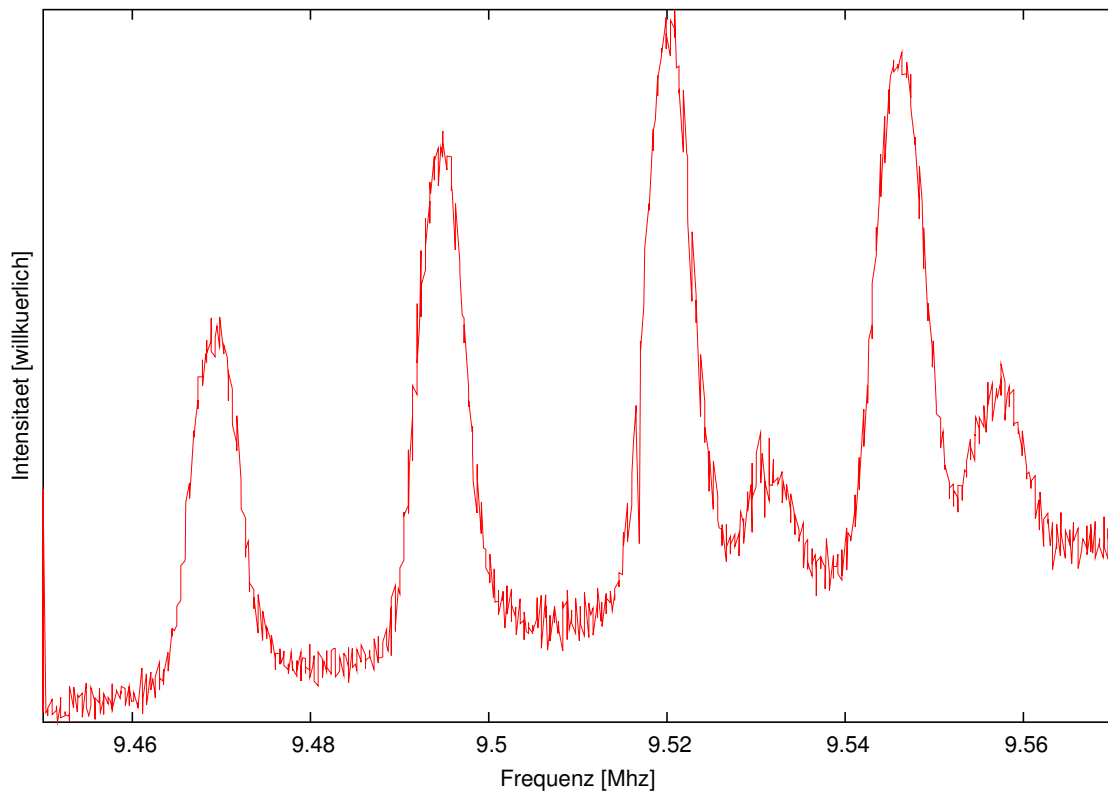


Abbildung 17: Absorptionslinien für  $^{87}\text{Rb}$  bei 840 mA.



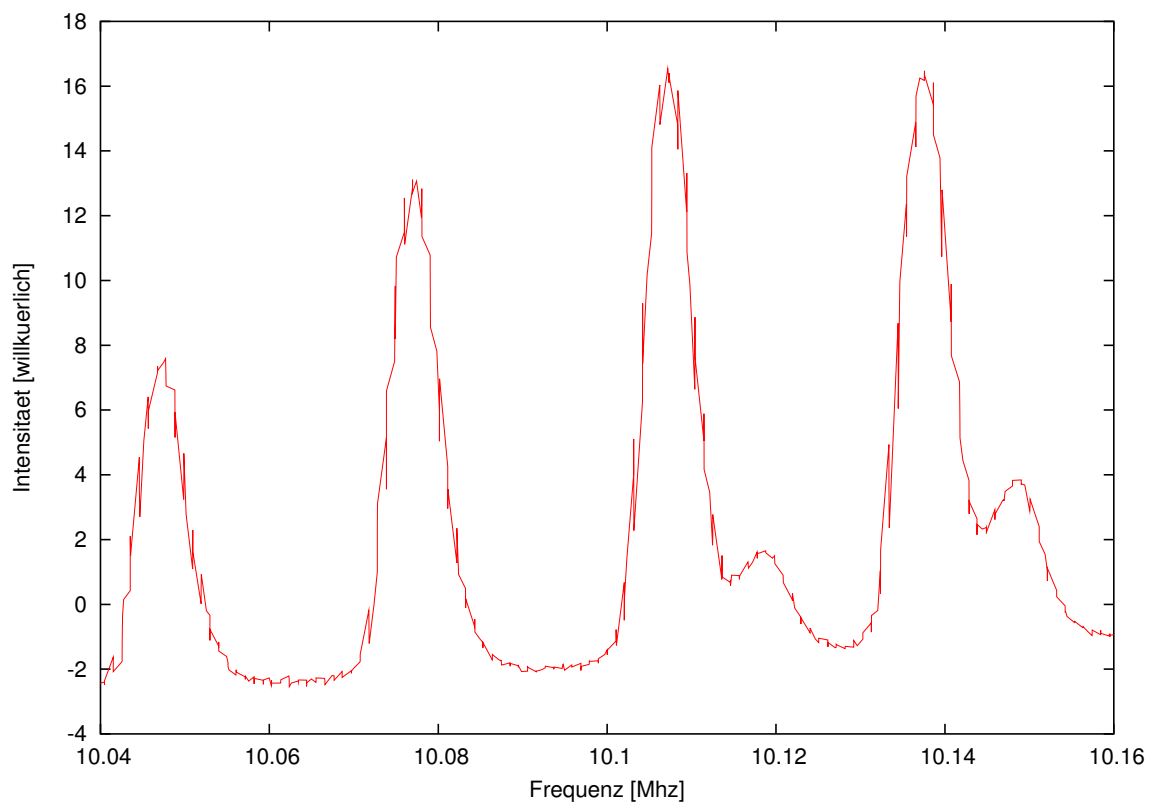


Abbildung 18: Absorptionslinien für  $^{87}\text{Rb}$  bei 890 mA.

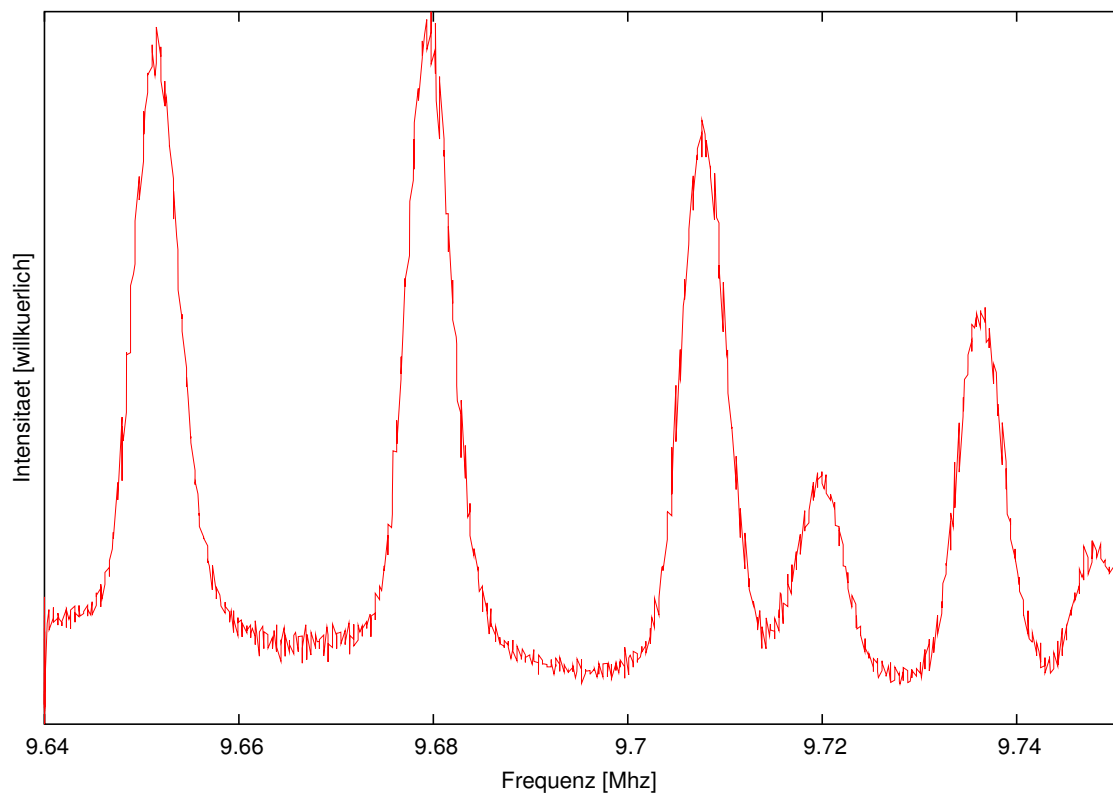


Abbildung 19: Absorptionslinien für  $^{87}\text{Rb}$  bei -840 mA.

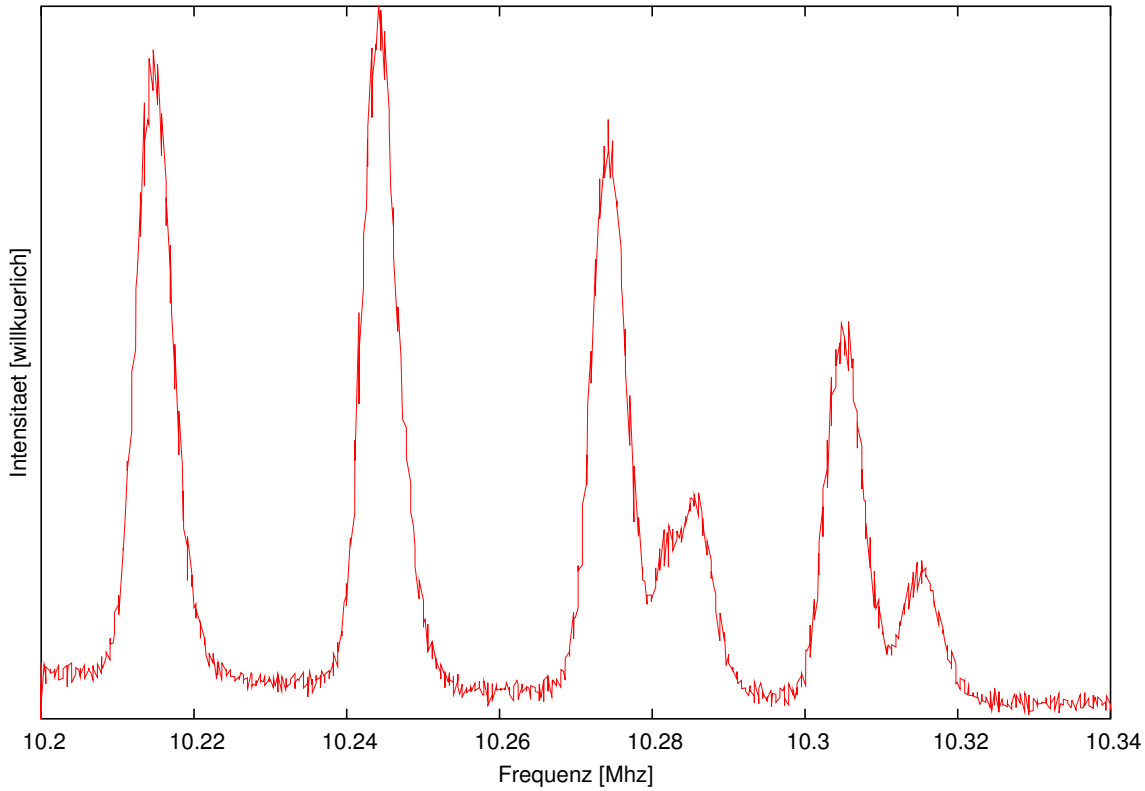


Abbildung 20: Absorptionslinien für  $^{87}\text{Rb}$  bei -890 mA.

	#	$I = 840 \text{ mA}$		$I = 890 \text{ mA}$	
		Frequenz [Mhz]	Fehler [Mhz]	Frequenz [Mhz]	Fehler [Mhz]
Große Extrema	1.	6.281	0.001	6.651	0.002
	2.	6.3065	0.0005	6.681	0.002
	3.	6.3330	0.0005	6.711	0.002
	4.	6.3595	0.0005	6.741	0.002
	5.	6.3861	0.0009	6.772	0.001
	6.	6.4133	0.0004	6.803	0.001
Kleine Extrema	1.	6.321	0.001	6.697	0.003
	2.	6.3463	0.0005	6.726	0.002
	3.	6.372	0.002	6.755	0.002
	4.	6.398	0.002	6.785	0.001

Tabelle 3: Absorptionslinien von  $^{85}\text{Rb}$ .

	#	840 mA	$\Delta\nu$	890 mA	$\Delta\nu$	-840 mA	$\Delta\nu$	-890 mA	$\Delta\nu$
		$\nu$ [MHz]	[Mhz]	$\nu$ [MHz]	[Mhz]	$\nu$ [MHz]	[Mhz]	$\nu$ [MHz]	[Mhz]
Große Extrema	1.	9.4694	0.0005	10.0472	0.0005	9.6513	0.0007	10.2148	0.0007
	2.	9.495	0.001	10.077	0.001	9.6797	0.0006	10.2443	0.0008
	3.	9.5205	0.0009	10.107	0.001	9.7081	0.0009	10.2742	0.0006
	4.	9.546	0.001	10.137	0.001	9.7363	0.0009	10.305	0.001
Kleine Extrema	1.	9.531	0.002	10.1183	0.0005	9.7197	0.0007	10.284	0.003
	2.	9.557	0.002	10.148	0.001	9.748	0.001	10.315	0.001

Tabelle 4: Absorptionslinien von  $^{87}\text{Rb}$

Mit der Breit-Rabi-Formel (11) ergibt sich

$$W(m, m_F) \approx -\frac{\Delta W}{2(2I+1)} + \mu_B g_I H_0 m_F \pm \frac{\Delta W}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{4m_F}{2I+1} x + x^2 \right)$$

Jetzt läßt sich das Magnetfeld  $H_0$  aus einer Messung der Übergangsfrequenz  $W_1 - W_2$  ermitteln:

$$H_0 = \frac{W_1 - W_2}{\mu_B \Delta m_F} \cdot \frac{1}{g'_I + \frac{g_J - g'_I}{2I+1}} \quad (24)$$

Mittels der Gaußschen Fehlerfortpflanzung ergibt sich

$$\Delta H_0 = \frac{\Delta(W_1 - W_2)}{\mu_B \Delta m_F \left( g'_I + \frac{g_J - g'_I}{2I+1} \right)}$$

Mittels Gleichung (24) und den Tabellen 3 und 4 erhält man für das Feld im Zentrum der Helmholtzspulen die Werte in Tabelle 5.

	#	840 mA $H_0$ [mT]	$\Delta H_0$ [mT]	890 mA $H_0$ [mT]	$\Delta H_0$ [mT]
Große Extrema	1.	1.3479	0.0002	1.4274	0.0004
	2.	1.3533	0.0001	1.4337	0.0004
	3.	1.3590	0.0001	1.4401	0.0003
	4.	1.3647	0.0001	1.4466	0.0004
	5.	1.3704	0.0002	1.4532	0.0003
	6.	1.3762	0.0001	1.4599	0.0002
Kleine Extrema	1.	1.3565	0.0003	1.4371	0.0006
	2.	1.3619	0.0001	1.4434	0.0005
	3.	1.3674	0.0004	1.4496	0.0004
	4.	1.3731	0.0003	1.4561	0.0003

Tabelle 5: Magnetfeld anhand von  $^{85}\text{Rb}$

	#	840 mA $H_0$ [mT]	$\Delta H_0$ [mT]	890 mA $H_0$ [mT]	$\Delta H_0$ [mT]	-840 mA $H_0$ [mT]	$\Delta H_0$ [mT]	-890 mA $H_0$ [mT]	$\Delta H_0$ [mT]
Große Extrema	1.	1.3557	0.0001	1.4385	0.0001	-1.3818	0.0001	-1.4625	0.0001
	2.	1.3594	0.0001	1.4427	0.0002	-1.3858	0.0001	-1.4667	0.0001
	3.	1.3630	0.0001	1.4471	0.0002	-1.3899	0.0001	-1.4710	0.0001
	4.	1.3667	0.0001	1.4514	0.0002	-1.3939	0.0001	-1.4754	0.0002
Kleine Extrema	1.	1.3646	0.0002	1.4486	0.0001	-1.3916	0.0001	-1.4724	0.0004
	2.	1.3683	0.0002	1.4529	0.0002	-1.3956	0.0002	-1.4768	0.0002

Tabelle 6: Magnetfeld anhand von  $^{85}\text{Rb}$

Gewichtete Mittelwerte für das Feld der Helmholtzspulen finden sich in Tabelle 7.

Aus Tabelle 7 läßt sich das Feld der Helmholtzspulen unabhängig vom Erdmagnetfeld ermitteln. Dazu mittelt man die Beträge für entgegengesetzt gepolte Magnetfelder und erhält Tabelle 8.

Strom [mA]	<sup>85</sup> Rb	<sup>87</sup> Rb
840	1,3634 ± 0,0003	1,3600 ± 0,0004
890	1,4492 ± 0,0010	1,4450 ± 0,0003
-840		-1,3883 ± 0,0003
-890		-1,4689 ± 0,0005

Tabelle 7: Gewichtete Mittelwerte für  $H_0$  in mT

Strom [mA]	Feld [mT]	Fehler [mT]
840	1,37	0,01
890	1,46	0,01

Tabelle 8: Feld der Helmholtzspule abseits anderer Felder

## 2.5 Bestimmung des Erdmagnetfeldes

Da wir das Magnetfeld bei <sup>87</sup>Rb jeweils für zwei verschiedene Orientierungen ausgemessen haben, sind wir nun in der Lage, das Erdmagnetfeld zu bestimmen. Dessen Wert  $H_{Erde}$  wird im folgenden für alle Peaks der <sup>87</sup>Rb-Spektren bestimmt. Die Bestimmung erfolgt "pro Peak", da sich hierbei die additiven systematischen Fehler, die sich, falls existent, pro Linie nicht ändern, wegheben. Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 9. Da die Fehler alle gleich sind, gestaltet sich die Bildung des gewichteten

±840 mA $H_{Erde}$ [mT]	$\Delta H_{Erde}$ [mT]	±890 mA $H_{Erde}$ [mT]	$\Delta H_{Erde}$ [mT]
0.0130	0.0001	0.0120	0.0001
0.0132	0.0001	0.0120	0.0001
0.0134	0.0001	0.0119	0.0001
0.0136	0.0001	0.0120	0.0001
0.0135	0.0001	0.0119	0.0001
0.0136	0.0001	0.0119	0.0001

Tabelle 9: Erdmagnetfeld

Mittelwerts besonders einfach. Man erhält

für  $I = \pm 840$  mA:

$$H_{Erde} = (0.0134 \pm 0.0001)\text{mT}$$

und für  $I = \pm 890$  mA:

$$H_{Erde} = (0.0120 \pm 0.0001)\text{mT}.$$

Wenn man aus den gewichteten Mittelwerten für das Helmholtzfeld, Tabelle 7, das Erdmagnetfeld berechnet, so erhält man

für  $I = \pm 840$  mA:

$$H_{Erde} = (0.0141 \pm 0.0005)\text{mT}$$

und für  $I = \pm 890$  mA:

$$H_{Erde} = (0.0120 \pm 0.0006)\text{mT}.$$

## 2.6 Diskussion

Alle Graphen zeigen den erwarteten Verlauf. Die Berechnungen des Helmholtz-Magnetfeldes in den Tabellen 2 und 8 liefert übereinstimmende Werte innerhalb des Fehlerbereiches. Leider stimmen die verschiedenen Werte für das Erdmagnetfeld nicht überein. Offenbar liegt dies an einem systematischen Fehler im Unterschied der Messungen bei  $\pm 840$  mA und  $\pm 890$  mA. Dies wird besonders an Tabelle 9 deutlich, denn die Werte in den Spalten 1 und 3 stimmen untereinander offenbar überein. Der Grund liegt darin, dass die Taylornäherung der Wurzel in der Breit-Rabi-Formel zu grob war.

## Literatur

- [1] Demtröder. *Experimentalphysik 3. Atome, Moleküle und Festkörper. 2.Auflage.* Springer Verlag, unbekannt.
- [2] Landesanstalt für Umweltschutz Baden-Württemberg. Elektromagnetische felder im alltag. Technical report, Landesanstalt für Umweltschutz Baden-Württemberg, <http://www.lfu.baden-wuerttemberg.de/lfu/abt3/e-smog/start.htm>, 2002.
- [3] Roland Frisch. Rolands straßenbahn-seite. <http://www.koelnbahn.de/index.htm>, 26. August 2002.
- [4] Walter Greulich, editor. *Lexikon der Physik: in sechs Bänden.* Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag, 1998.
- [5] Prof. Dr. Rudolf Gross. Physik iv - atome, moleküle, kerne und wärme-statistik.
- [6] E. Hecht. *Optik.* Oldenbourg Verlag. München, Wien, 3. edition, unbekannt.
- [7] J.-Ph. Pérez. *Optik.* Spektrum Akademischer Verlag, 1996.
- [8] M. Rückert. Physik-kurs. rechenaufgaben (longies) und denksportaufgaben. <http://www.av.fh-koeln.de/professoren/rueckert/physikueb.doc>. Über google.com als HTML ansehbar.
- [9] Daniel A. Steck. Rubidium 87 d line data. Technical report, Los Alamo National Laboratory, 2001.
- [10] T.Mayer-Kuckuk. *Atomphysik.* Teubner Studienbücher, 1994.
- [11] Herman Haken und Hans Christoph Wolf. *Atom- und Quantenphysik.* Springer Verlag, 1996.

### 3 Ergänzung

#### 3.1 Diskussion Erdmagnetfeld

Um einen Literaturwert für die Stärke des Erdmagnetfelds zu erhalten, wurde zunächst die Ausrichtung des Versuchsaufbaus bestimmt. Dazu wurde wie empfohlen auf einer Landkarte die Ausrichtung des Gebäudes bestimmt, siehe Abbildung 21.



Abbildung 21: Ausschnitt des Lageplans der Universität zur Bestimmung der Ausrichtung des Versuchsaufbaus. Quelle: <http://www.uni-koeln.de/uni/plan/>.

Da der Versuch parallel zur Wand des Gebäudes aufgestellt war, entsprechen die Winkel in der Karte dem Winkel zwischen Nord-Süd-Richtung und Versuchsaufbau. Dieser ist damit  $\beta := 31 \pm 2^\circ$ .

Die Stärke des Erdmagnetfeldes in Deutschland beträgt nun im Mittel  $B := 48 \mu\text{T}$  (Quelle: [8]). Es ist um  $\alpha := 65^\circ$  gegen die Erdoberfläche geneigt. Projizieren des Feldvektors auf die Erdoberfläche und dann auf die Richtung des Versuchsaufbaus ergibt:

$$B_{\text{effektiv}} = B \cos \alpha \cos \beta. \quad (25)$$

Der Fehler ergibt sich aus dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz nach einer Umformung zu

$$\Delta B_{\text{effektiv}} = B_{\text{effektiv}} \sqrt{(\tan \alpha \Delta \alpha)^2 + (\tan \beta \Delta \beta)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} \quad (26)$$

Der Fehler von  $B$  wird als  $\pm 2 \mu\text{T}$  angenommen, da sich hier verschiedene Quellen widersprechen (siehe z.B. [2]). Der Fehler von  $\alpha$  wird als  $\pm 1^\circ \hat{=} \frac{\pi}{180}$  angesetzt ( $\pm 1$  bezüglich der letzten angegebenen Stelle).

Mit Hilfe von (25) und (26) ergibt sich:

$$\Rightarrow B_{\text{effektiv,mittel}} = 17 \pm 1\mu\text{T}$$

Das stimmt mit dem für  $I = 840 \text{ mA}$  gemessenen Wert innerhalb des dreifachen Fehlerbereichs überein. Mit dem für  $I = 890 \text{ mA}$  gemessenen Wert stimmt es nicht mehr überein.

Die große Abweichung erklärt sich durch die Schwankungen des Erdmagnetfelds. Die gefundenen Literaturwerte sind Mittelwerte. Unsere Werte sind nur aus dem Zeitbereich von ungefähr einer Stunde.

Außerdem könnten Streufelder aus anderen Teilen des Instituts die Messung verfälscht haben (Kabel, Computer usw.). Außerdem fährt in der Nähe eine Straßenbahn. (Starkstromkabel). Bahnen neueren Typs (die für die Linie 9 eingesetzt werden) haben  $1.300 \text{ PS} \hat{=} 955,5 \text{ kW}$  (Quelle: [3]). Bahnen werden bekanntlich mit  $15.000 \text{ Volt}$  Wechselstrom betrieben. Bei voller Beschleunigung (die manche Kölner Bahnfahrer gerne benutzen) fließen also  $I \approx 60 \text{ A}$  durch die Leitungen. Diese waren von unserem Versuchsaufbau  $20\text{-}30 \text{ Meter}$  entfernt. Resultierende Felder sind in der Größenordnung  $\mu\text{T}$ , können das Experiment also beeinflussen.

Möglicherweise ist auch die Lage des physikalischen Instituts auf der verwendeten Karte noch ungenauer als die Messung. Mit einer (sehr alten) Karte ergaben sich deutliche Abweichungen für die Winkel; da die Karte aber nicht in digitaler Form vorlag, sind diese hier nicht reproduziert.

## 3.2 Bestimmung der Maxima-Positionen

Zunächst werden die Frequenz-Achsen der aufgenommenen Spektren mit Hilfe der jeweiligen Start- und Endfrequenzen geeicht, da die vorhandenen Werte nur als Skalenteile-Skalenteile-Paare verfügbar sind. Die Intensitätsskalen werden nicht geeicht, weil die genaue Höhe der Maxima hier nicht von Interesse ist. Wichtig sind diesbezüglich nur die relativen Höhen der Maxima zueinander innerhalb eines jeden Spektrums, um die Übergangslinien genau zuzuordnen zu können. Ein Vergleich der Intensitäten verschiedener Spektren ist nicht nötig.

Das Bestimmen der genauen Frequenzen der Maxima  $f_{max}$  und der zugehörigen Fehler  $\Delta f_{max}$  ist nicht unproblematisch, da alle Spektren um den optimalen Verlauf herumoszillieren. Dies wird sowohl an den Graphen als auch an den zugehörigen Wertetabellen deutlich. Es gibt für viele Peaks mehrere Maximalintensitäten, die dicht nebeneinander liegen und zwischen denen meist kleinere Täler liegen. Um daraus verwertbare Daten zu entnehmen, haben wir für jeden Peak folgendes Verfahren angewendet: Es wurde für das Peak ein rechter und linker Rand bestimmt, ab dem ein deutlicher Abfall der Intensität auftritt. Dann wurde die Mitte des so festgelegten Bereiches bestimmt. Der Abstand der Mitte zu den beiden Rändern wurde als Fehler angenommen.

Diese Art der Fehlerbestimmung ist zugegebenermaßen vom Augenmaß des Auswerters abhängig, da man darüber streiten kann, was als deutlicher Abfall vertretbar ist und was nicht. Es wurde jedoch versucht, den Fehler in grobe Abhängigkeit



zur Breite des jeweiligen Peaks zu setzen, da die spitzeren Peaks sinnvollerweise einen kleineren Fehler haben sollten als die breiteren.

Eine zweite Möglichkeit, die Positionen und Fehler der Peaks zu bestimmen, wäre gewesen, zunächst aus der Höhe des Peaks die Halbwertsbreite zu bestimmen. Anschließend hätte man die Mitte der Halbwertsbreite als Peakposition festlegen können. Nimmt man die halbe Halbwertsbreite als Fehler, so erhält man unnötig große Fehler. Dies liegt zum einen daran, daß die Peaks durch die verschiedenen Überlagerungen nicht symmetrisch sind. Zum anderen läßt sich die Höhe der Peaks nicht genau festlegen.